بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

فصل ۱

جبر خطی کاربردی

گردآورندگان: بهنام جعفربلند و حمید حسنی

استاد درس: دکتر سجاد لکزیان

جلسه اول.

سیستم‌های دینامیکی: مجموعه‌ای از ابعاد (متغیرهایی که یک سیستم را توصیف می‌کنند) که با زمان تغییر می‌کنند.

مثال ۱-۱. یک جسم در حال سقوط آزاد

$$g = 10\frac{m^n}{Sec} \quad , \quad v = -gt + v_0 \quad , \quad x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

این سیستم را با سرعت v توصیف می‌کنیم. سیستم یک بعدی

X (سرعت با یک رابطه خطی توصیف می‌شود. یک یعدی و خطی است). X نسبت به زمان خطی است.

$$x^{\circ} = -gt + v_0 = v$$

مثال ۱-۲. پاندول

سیستم دینامیک غیرخطی نسبت به θ،

$$\theta_{(t)} = f(\theta)$$

خطی نسبت به x

$$\begin{cases} x_1 t_1 = e^{at} x_{(0)}, & \text{خطی نسبت به } x \text{ , } \det \neq 0 \\ \dot{x}_1 t_1 = a e^{at} x_{(0)} = a x_1 t_1, & \det = 0 \end{cases}$$

سیستم دینامیک خطی نسبت به x، $\dot{x}_1 t_1 = A x_1 t_1$ و $X = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ e^{At} x_{(0)} &= (I + At + \frac{At^2}{2!} + \frac{At^3}{3!} + \dots) x_{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(e^{At} x_{(0)}) = (A + At + \frac{A^3}{2}t^2 + \dots) = A \times (I + At + \frac{At^2}{2!} + \dots) x_{(0)} \\ &\dot{x}_1 t_1 = A x_1 t_1 \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که $x(t) = e^{at} x_{(0)}$ برقرار است.

بسط عدد به توان x:

$$2^x = e^{\ln(2x)} = 1 + (\ln(2))x + (\frac{\ln(2)^2}{2})x^2$$

جبر خطی: مطالعه‌ی دستگاه معادلات خطی (معدلاتی به شکل $A_{n\times m} X_{m\times 1} = B_{n\times 1}$).

ساده‌ترین حالت (دستگاه معادلات): دو معادله دو متغیره

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

روش اول: جایگزین کردن، که با بیشتر شدن تعداد متغیرها و معادلات، کار سخت می‌شود.

روش دوم: حذف متغیرها

$$-\frac{a_2}{a_1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \vdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \vdots & c_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{a_2}{a_1}R_1 + R_2} R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 - -\frac{b_1 a_2}{a_1} & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{دترمینان} \begin{cases} b_2 - -b_1 \frac{a_2}{a_1} \neq 0 \Rightarrow a_1 b_2 - b_1 \neq 0 \\ b_2 - -b_1 \frac{a_2}{a_1} = 0 \Rightarrow a_1 b_2 - b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & b_۱ & \vdots & \frac{c_۱}{a_۱} \\ ۰ & ۱ & \vdots & \frac{c_۲ - c_۱ \frac{a_۲}{a_۱}}{b_۲ - b_۱ \frac{a_۲}{a_۱}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & *_۱ & \vdots & *_۲ \\ ۰ & ۱ & \vdots & *_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & x_۱ & \vdots & x_۲ \\ ۰ & ۰ & \vdots & x_۳ \end{pmatrix}$$

دستگاه معادلات سازگار شد و فقط یک جواب دارد.

اگر $x_۳ = ۰$، دستگاه سازگار است و بی‌شمار جواب دارد.

اگر $x_۳ \neq ۰$، دستگاه ناسازگار است و جواب ندارد.

تمرین ۱-۳. بدون محاسبه نشان دهید که دستگاه معادلات زیر جواب دارد

$$\begin{cases} ۲^{۱۳۹۷}x + (۱.۵)^{۱۳۹۸}y = ۰ \\ (۱.۵)^{۱۳۹۸}x + ۲^{۱۳۹۹}y = ۰ \end{cases}$$

۱. چون از مبدا می‌گذرد جواب دارد.

۲. چون $c_۱$ و $c_۲$ صفر هستند و با جایگزینی در دستگاه معادلات نتیجه می‌شود که دستگاه معادلات جواب دارد.

جلسه دوم

سوال ۱-۴. سازگاری دستگاه زیر را بررسی کنید. حداقل یک جواب داشته باشیم (دقیقا یک جواب داشته باشیم.)

$$\begin{cases} x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۰ \\ +۲x_۲ - ۸x_۳ = ۸ \\ -۴x_۱ + ۵x_۲ + ۹x_۳ = -۹ \end{cases}$$

روش سیستماتیک

اعمالی که جواب‌های دستگاه را تغییر نمی‌دهد.

۱. تعویض دو معادله با یکدیگر

۲. ضرب یک معادله در یک عدد غیرصفر

۳. یک معادله را می‌توان با حاصل‌جمع همان معادله و ضریبی از یک معادله تعویض کرد.

۴. تشکیل ماتریس افزوده

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -8 & \vdots & 8 \\ -4 & 5 & 9 & \vdots & -9 \end{bmatrix}$$

اعمال سطری مقدماتی:

۱. تعویض دو سطر

۲. سطر را در یک عدد ناصفر ضرب کرد

۳. یک سطر را با حاصل‌جمع همان سطر و ضریبی از سطر دیگر جایگزین کرد.

فرم‌های مناسب:

۱. بالا و یا پایین مثلثی (ماتریس ضرایب به فرم‌های گفته شده در می‌آید.)

$$\xrightarrow{4R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & +1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -8 & \vdots & 8 \\ 0 & -3 & 13 & \vdots & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{1.5R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -8 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= \mathbf{3} \\ x_2 &= \mathbf{16} \\ x_1 &= \mathbf{29} \end{aligned}$$

دستگاه سازگار است زیرا روی قطر اصلی ماتریس دوم، ضریب غیر صفر نداریم.

فرم بالامثلثی در حالتی‌که ماتریس ضرایب مربعی باشد، قابل استفاده است. یعنی تعداد متغیرها و معادلات برابر باشند.

۲. تبدیل یک ماتریس به فرم پلکانی

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

که A سطری پلکانی است ولی B سری پلکانی نیست.

تعاریف:

عنصر پیشرو یک سطر: اولین عنصر آن سطر از سمت چپ.

عنصر پیشرو یک ستون: بالاترین عنصر ناصفر یک ستون.

یک پیشرو: عنصری که پیشرو سطری می‌باشد و برابر یک است.

تعریف فرم پلکانی: یک ماتریس به فرم پلکانی است اگر دارای خواص زیر باشد

۱. تمام سطرهای به‌صورت (۰۰۰۰) در پایین ماتریس قرار گرفته باشد.

۲. عنصر پیشرو هر سطر در سمت راست عنصر پیشرو سطر قبلی قرار می‌گیرد.

۳. عناصر زیر عناصر سطری پیشرو همگی صفر هستند.

ماتریس پلکانی کاهش‌یافته علاوه‌بر شرایط بالا، دارای شرایط زیر نیز می‌باشند

۴. تمام عناصر پیشرو، برابر با یک است.

۵. در ستون‌های حاوی یک پیشرو، بقیه عناصر همگی صفر هستند.

سه مورد اول باعث می‌شود ماتریس پلکانی باشد و تمام پنج مورد باعث می‌شود ماتریس پلکانی کاهش‌یافته باشد.

مثال ۱-۵.

پلکانی هست ولی کاهش یافته نیست. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3\to R_3}$ پلکانی نیست. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2\to R_2\ ,\ \frac{1}{2}R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1\to R_1\ ,\ -\frac{4}{3}R_3+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{8}{3}R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پلکانی کاهش یافته $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

جلسه سوم.

مثال ۱-۶. دستگاه معادلات خطی را به روش حذفی گاوس- جردن حل کنید.

$$\begin{cases} x - ۲y + z = -۶ \\ ۲x - ۳y = -۷ \\ -x + ۳y - ۳z = ۱۱ \end{cases}$$

قدم اول. ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \vdots & -۶ \\ ۲ & -۳ & ۰ \vdots & -۷ \\ -۱ & ۳ & -۳ \vdots & ۱۱ \end{bmatrix}$$

با استفاده از matlab:

$$> C = [۱\ -۲\ ۱;\ ۲\ -۳\ ۰;\ -۱\ ۳\ -۳]$$

$$> b = [-۶\ -۷\ ۱۱]$$

$$> b = b'$$

$$> A = [C\ ,\ b]$$

$$> \mathrm{rref}(A)$$

خروجی: $[۱\ ۰\ -۳\ ۴;\ ۰\ ۱\ -۲\ ۵;۰\ ۰\ ۰\ ۰]$ فرم سطری کاهش‌یافته پلکانی.

سازگاری: چون در ستون z، یک پیشرو نداریم z یک متغیر آزاد است.

$$z = t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y = ۵ + ۲t$$

$$x = ۴ + ۳t$$

نتیجه: بی‌نهایت جواب دارد.

جواب‌های دستگاه به شکل

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ + ۳t \\ ۵ + ۲t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۵ \\ ۰ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

جواب‌ها خطی را تشکیل می‌دهند که از نقطه $(۴, ۵, ۰)$ عبور می‌کند، در راستای بردار $(۳, ۲, ۱)$

مثال ۱-۷. جواب‌های دستگاه

$$\begin{cases} x_۲ - ۳x_۳ + ۴x_۴ = ۱ \\ ۲x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = -۱ \\ ۲x_۱ - x_۲ - ۲x_۳ + ۴x_۴ = ۰ \\ -۶x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ - ۸x_۴ = ۱ \end{cases}$$

ضرایب

$C = [۰\ ۱\ -۳\ ۴;\ ۲\ -۲\ ۱\ ۰;\ ۲\ -۱\ -۲\ ۴;\ -۶\ ۴\ ۳\ -۸]$

$b = [۱\ ;\ -۱\ ;\ ۰;\ ۱]$

$A = [C, b]$

$> \mathrm{rref}(A)$

خروجی:

$$\begin{bmatrix} X_۱ & X_۲ & X_۳ & X_۴ & \vdots & \\ ۱ & ۰ & -\frac{۵}{۲} & ۴ & \vdots & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۴ & \vdots & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \vdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \vdots & ۰ \end{bmatrix}$$

جواب دارد $\leftarrow$ سازگار است، بی‌نهایت جواب دارد.

$X_۱$ و $X_۲$ متغیر وابسته‌اند. (چون در ستون متناظرشان دارای یک پیشرو هستند.)

$X_۳$ و $X_۴$ متغیرهای آزاد (چون در ستون‌های متناظرشان یک پیشرو نداریم.)

$$X_۳ = t, \quad X_۴ = s \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$X_۲ = ۱ + ۳t - ۴s$$

$$X_۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۲}t - ۴s$$

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۲}t - ۴s \\ ۱ + ۳t - ۴s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} \\ ۳ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -۴ \\ -۴ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

جواب: جواب‌ها بر روی صفحه هستند که از نقطه $(1,0,\frac{1}{2})$ گذر می‌کند و شامل دو بردار $((-4,-4,0,1),(\frac{5}{2},3,1,0))$ می‌شود.

تصویر سطری و ستونی از یک دستگاه معادلات خطی

$$
\begin{aligned}
&a_{11}X_1+\cdots+a_{1n}X_n=b_1\\
&a_{21}X_1+\cdots+a_{2n}X_n=b_2\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&a_{m1}X_1+\cdots+a_{mn}X_n=b_m
\end{aligned}
$$

تمام $(X_1,\dots,X_n)$ هایی که در یک معادله صدق می‌کنند، یک ابرصفحه را را تعریف می‌کنند.

مثلا، در $\mathbb{R}^2$ یک ابرصفحه، یک خط است. در $\mathbb{R}^3$ یک ابرصفحه، یک صفحه است.

جواب‌ها $=$ اشتراک m ابرصفحه در فضای $\mathbb{R}^n$ هستند.

معادله زیر فضای تولید شد توسط بردارهای

$$
V_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\quad V_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\8\end{pmatrix}\quad V_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}
$$

بازنویسی دستگاه

$$
X_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+X_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+X_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}
$$

تعبیر ستونی: فضای تولید شده توسط ستون‌ها برابر است با تمام b_1 تا b_nهایی که برای آن‌ها دستگاه سازگار است.

$$
\begin{bmatrix}-1&1&2&\vdots&b_1\\1&-3&-1&\vdots&b_2\\-2&-8&1&\vdots&b_3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-1&3&1&\vdots&b_2\\0&-1&\frac{1}{5}&\vdots&\frac{b_1+2b_2}{-5}\\0&0&0&\vdots&b_1+3b_2+b_3\end{bmatrix}
$$

فضای تولید شده توسط V_1، V_2 و V_3 عبارت است از صفحه‌ی $x+3y+z=0$.

جلسه چهارم

مثال ۱-۸. روش حذفی گاوس- جردن.

$$\begin{cases} X_2 - 3X_3 + 4X_4 = 1 \\ 2X_1 - 2X_2 + X_3 = -1 \\ 2X_1 - X_2 - 2X_3 + 4X_4 = 0 \\ -6X_1 + 4X_2 + 3X_3 - 8X_4 = 1 \end{cases}$$

قدم اول: ماتریس افزوده

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & \vdots & 0 \\ -6 & 4 & 3 & -8 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

قدم دوم: اولین ستون ناصفر را از سمت چپ در نظر می‌گیریم.
اگر لازم شد، با جابه‌جا کردن سطرها عنصر پیشرو را به مکان پیشرو ستون منتقل کنید و آن‌را به عدد ۱ تبدیل کنیم. سپس اعداد زیر عنصر پیشرو را صفر می‌کنیم. (با انجام اعمال سطری مقدماتی)

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & 4 & 3 & -8 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ -6 & 4 & 3 & -8 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 & 4 & 0.5 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

کاربردهای گاوس-جردن (یا فرم سطری پلکانی کاهش‌یافته)

تعریف ماتریس معکوس‌پذیر: ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را معکوس‌پذیر گوییم اگر یک ماتریس مربعی $B_{n\times n}$ وجود داشته باشد که $BA = AB = I$ یا $(B = A^{-1})$ (اگر A معکوس‌پذیر باشد $A_{n\times n}X = b \to BAX = Bb \to X = Bb$)

پیدا کردن معکوس $A_{n\times n}$ در صورت معکوس‌پذیر بودن:

$$\begin{bmatrix} A_{n\times n} & | & I_{n\times n}\end{bmatrix}_{n\times 2n} \xrightarrow{GJ} \begin{bmatrix} R & | & L\end{bmatrix}$$

اگر A معکوس‌پذیر باشد ماتریس $[\, I \mid A^{-1}\,]$ بدست می‌آید $A = L^{-1}R \quad LA = R$.

جلسه پنجم

معادله‌های همگن و غیرهمگن

دستگاه معادلات همگن

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad , \quad AX = 0 \quad A_{m\times n}X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

دستگاه معادلات غیرهمگن

$$AX = \hat{b} \neq 0$$

فرض کنید $\hat{X}_0$ برداری است که جواب $AX = 0$ است.

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0 \qquad X_1 \begin{bmatrix} | \\ c_1 \\ | \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} | \\ c_2 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + X_n \begin{bmatrix} | \\ c_n \\ | \end{bmatrix} = 0$$

یعنی $AX_0 = 0$. یعنی این‌که ترکیب حاصل از ستون‌ها برابر صفر است.

تعریف ۱-۹. فضای پوچ ماتریس A عبارت است از تمام جواب‌های معادله همگن $A\hat{X} = 0$ با خواص:
اگر $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ عضو پوچ باشند، داریم $A\hat{X}_1 = 0$ و $A\hat{X}_2 = 0$ در نتیجه می‌توان $A(\alpha\hat{X}_1 + \beta\hat{X}_2) = 0$ را نتیجه گرفت. فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$ را با $N(A)$ یا $\mathrm{Ker}(A)$ نمایش می‌دهند.

$$\alpha \underbrace{A\hat{X}_1}_{0} + \beta \underbrace{A\hat{X}_2}_{0} = 0$$

رابطه جواب‌های معادلات همگن و غیرهمگن:

$A\hat{X} = \hat{0}$ جواب‌های معادلات همگن، یک یا بی‌نهایت جواب دارد.

$A\hat{X} = \hat{b} \neq 0$ معادلات غیرهمگن در حالت کلی بی‌نهایت جواب دارند.

فرض کنید X_0 یک جواب باشد از $A\hat{X} = \hat{b}$ یعنی $A\hat{X}_0 = \hat{b}$.

در نتیجه اگر یک جواب از معادله غیرهمگن $AX = b$ را داشته باشیم و تمام جواب‌های همگن را نیز بدست می‌آوریم. آن‌گاه تمام جواب‌های غیرهمگن عبارتند از: فضای پوچ + X_0

$$\begin{cases} A\hat{X}_0 = \hat{b} \\ A\hat{X} = 0 \end{cases} \Rightarrow A\hat{X}_0 + A\hat{X} = \hat{b} + 0 \quad A(\hat{X}_0 + \hat{X}) = b$$

$$A\hat{y} = \hat{b} \quad A(\hat{y} - \hat{X}_0) = A\hat{y} - A\hat{X}_0 = \hat{b} - \hat{b} = 0$$

$$\begin{cases} \hat{y} - \hat{X}_0 \in N(A) \\ y - X_0 = X \in N(A) \\ y = X + X_0 \qquad\qquad X \in N(A) \end{cases}$$

یک جواب X_0 از معادله غیرهمگن $AX_0 = b \neq 0$ و فضای پوچ $N(A)$ را داشته باشیم. تمام جواب‌های غیرهمگن $X_0 + N(A)$

زیرفضاهای خطی $\mathbb{R}^n$:

در فضای $\mathbb{R}^2$ تمام زیرفضاها عبارتند از :

۱. $\{(0,0)\}$ (که زیرفضای سره است.)

۲. تمام خطوط گذرا از مبدا (که زیرفضاهای سره هستند).

۳. تمام $\mathbb{R}^2$

در فضای $\mathbb{R}^3$ تمام زیرفاضهای خطی عبارتند از:

۱. $\{0\}$ (زیرفضای سره است).

۲. تمام خطوط گذرا از مبدا (زیرفضای سره است).

۳. تمام صفحات گذرا از مبدا (زیرفضای سره است).

۴. تمام $\mathbb{R}^3$

مثال ۱-۱۰. مثال از زیرفضاها در $\mathbb{R}^n$:

$$\{(0,0,\dots,0,x_{i1},0,\dots,0,X_{i2},0,\dots,0,X_{ik},0,\dots)\in\mathbb{R}^n\}$$

زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ که اعضای آن عبارتند از $n-$تایی‌هایی که مولفه‌های $i_1,\dots,i_k$ آن‌ها به دلخواه انتخاب می‌شوند و بقیه‌ی مولفه‌ها هم صفر است.

زیرفضاهایی از $\mathbb{R}^n$:

برای مثال $\mathbb{R}^5$:

$$\{(0,a,b,c,d)|a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

$$\{(X_{i_1},0,X_{i_2},X_{i_3},0)|X_{i1},X_{i_2},X_{i_3}\in\mathbb{R}\}$$

در $\mathbb{R}^3$:

زیرفضا از $\mathbb{R}^3$ که صفحه Y و Z به آن گفته می‌شود.

$$\{(0,Y,Z)|Y,Z\in\mathbb{R}\}$$

تعریف ۱-۱۱ (زیرفضای $\mathbb{R}^n$)**.** یک زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}^n$ که شامل $(0,\dots,0)$ است، و به‌علاوه $\alpha v+\beta w\in V$ است هرگاه $v,w\in V$ باشد. آن‌گاه V را یک زیرفضای خطی می‌نامیم.

مثال‌های مهم از زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$:

زیرمجموعه‌ای که تشکیل شده است از تمام ترکیب‌های خطی چند بردار $\hat{v}_1,\hat{v}_2,\dots,\hat{v}_k$ در $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است. $\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k\in\mathbb{R}^n$

$$V=\{\alpha_1\hat{v}_1+\alpha_2\hat{v}_2+\cdots+\alpha_k\hat{v}_k|\,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}\}$$

زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k$ است.

ناتهی-صفر (OEV)

ترکیب خطی هر دو عضو V، مجددا عضوی از V است.

$$\alpha(\alpha_1\hat{v}_1+\cdots+\alpha_k\hat{v}_k)+\beta(\beta_1\hat{v}_1+\cdots+\beta_k\hat{v}_k)=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\hat{v}_1+\cdots+(\alpha\alpha_k+\beta\beta_k)\hat{v}_k$$

مثال ۱-۱۲. زیرفضاهای تولید شده توسط بردارهای روبه‌رو را به‌طور هندسی توصیف کنید.

$$\hat{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\hat{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\hat{v}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & b_2 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & b_1-b_3 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b_3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & b_1-b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{b_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b_1-b_3-b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{b_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4 \end{pmatrix}$$

شرط سازگاری $b_4 = 0$ باشد. یا به‌عبارتی $\{(X_1, X_2, X_3, 0) | \, X_i \in \mathbb{R}\}$

جلسه ششم

زیرفضای تولید شده در $\mathbb{R}^n$ توسط بردارهای $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \ldots, \hat{v}_k \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Span}\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \ldots, \hat{v}_k\} = \{a_1\hat{v}_1, a_2\hat{v}_2, \ldots, a_k\hat{v}_k\}$$

نمایش دکارتی فضای $\mathrm{Span}\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \ldots, \hat{v}_k\}$ سپس شرایط ناسازگاری را می‌نویسیم

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & | & b_1 \\ v_1 & v_2 & & v_n & | & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} R & & \vdots & \\ 0 & & \vdots & \\ 0 & & \vdots & \end{pmatrix}$$

تعویض کردن دو سطر

$$E_{m\times m} = \begin{pmatrix} ۱ &&&&&&& \\ & ۱ &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& \circ & \dots & ۱ && \\ &&&& \ddots &&& \\ &&& ۱ && \circ && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& ۱ \end{pmatrix} \quad \begin{cases} E_{rr} = ۱ \\ E_{ij} = E_{ji} = ۱ \quad r \neq i, j \\ E_{ii} = \circ \\ E_{jj} = \circ \end{cases}$$

مثال ۱-۱۳. سطر دوم و سوم را در یک ماتریس ۴ × ۳ عوض کنید

$$\begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \\ \circ & ۱ & \circ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \times \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

ضرب سطر i-ام در عدد α

$$E_{m\times m} = \begin{bmatrix} ۱ &&&&&& \\ & ۱ &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& \alpha &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& ۱ & \\ &&&&&& ۱ \end{bmatrix}$$

$$\alpha R_j + R_i + R_i$$

به‌طور خلاصه: هر عمل سطری مقدماتی برای یک ماتریس $A_{m\times n}$ را می‌توان با ضرب از چپ یک ماتریس معکوس‌پذیر $E_{m\times m}$ در A بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} A_{m\times n} & | & I_{m\times m} \end{pmatrix} \xrightarrow{G.J} \begin{pmatrix} E_۲E_۱A_{m\times n} & | & E_۲E_۱ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Upper & | & \\ & | & E_SE_{s-۱}\dots E_۱ \\ Triangle & | & \end{pmatrix} \quad ((E_s) \quad E_۱)A = U$$

که U بالا مثلثی یا پلکانی است. (طرف چپ $XA =$ طرف راست)

$$A_{m\times n} = \underbrace{E_1^{-1}\dots E_{s-1}^{-1}E_s^{-1}}_{m\times m} U_{m\times n}$$

به‌طور خلاصه (تجزیه LU): $A_{m\times n} = L_{m\times m}U_{m\times n}$، که $L_{m\times m}$ معکوس‌پذیر و $U_{m\times n}$ سطری پلکانی است.

محاسبه تجزیه LU:

$$\begin{pmatrix} A_{m\times n} & | & I_{m\times n}\end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} U & | & E\end{pmatrix} \quad EA = U\,,\ A = E^{-1}U$$

$$\begin{pmatrix} E & | & I\end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} I & | & E^{-1}\end{pmatrix} \quad A_{m\times n} = LU$$

استقلال خطی: k بردار و $\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k \in \mathbb{R}^n$ را مستقل خطی گویند اگر

$$\alpha_1\hat{v}_1 + \dots + \alpha_k\hat{v}_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1,\dots,\alpha_k = 0$$

تذکر ۱-۱۴. اگر E معکوس‌پذیر باشد و $\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k$ مستقل خطی باشند، آن‌گاه $E\hat{v}_1,\dots,E\hat{v}_k$ نیز مستقل خطی‌اند.

$$E^{-1}(a_1E\hat{v}_1 + \dots + a_kE\hat{v}_k = 0) = a_1\hat{v}_1 + \dots + a_k\hat{v}_k = 0 \Rightarrow a_1,\dots,a_k = 0$$

تست کردن استقلال خطی با استفاده از گاوس-جردن:

$$rref\begin{pmatrix} \dots & v_1 & \dots \\ \dots & v_2 & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & v_k & \dots \end{pmatrix} \tag{1}$$

$\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k$ مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر ماتریس(۱) فاقد سطر کاملا صفر باشد.

دلایل:

فرض: $\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_k$ مستقل خطی‌اند.

۱. تعویض سطرها استقلال خطی را حفظ می‌کند.

۲. ضرب یک سطر در عدد ناصفر، استقلال خطی را حفظ می‌کند.

۳. $\alpha v_i + v_j \to v_j$ استقلال خطی را حفظ می‌کند.

$$\hat{v}_i + \alpha \hat{v}_j = \hat{v}_i$$

$$\alpha_1 \hat{v}_1 + \cdots + \alpha_i(\hat{v}_i + \alpha \hat{v}_j) + \cdots + \alpha_k \hat{v}_k = 0$$

$$\alpha_1 \hat{v}_1 + \cdots + \alpha_i \hat{v}_i + \cdots + (\alpha_i + \alpha_j)\hat{v}_j + \cdots + \alpha_k \hat{v}_k = 0 \quad \alpha_1 = \alpha_i = \cdots = \alpha_k = 0$$

نتیجه ۱-۱۵. اعمال سطری مقدماتی استقلال خطی سطرها را حفظ می‌کنند. $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_k$ مستقل خطی‌اند اگر ماتریس زیر فاقد سطرهای کاملا صفر باشد

$$\operatorname{rref}\left(\begin{pmatrix} \ldots & v_1 & \ldots \\ \ldots & v_2 & \ldots \\ & & \\ \ldots & v_k & \ldots \end{pmatrix}\right).$$

جلسه هفتم

مستقل خطی بردارهای $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ در $\mathbb{R}^n$ را مستقل خطی گویند اگر فرم کاهش‌یافته پلکانی $\begin{pmatrix} \ldots & v_1 & \ldots \\ \ldots & v_k & \ldots \end{pmatrix}$ شامل سطر کاملا صفر نباشد.

فضای تولید شده توسط $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$:

$$\{v_1, \ldots, v_k\}$$

$$< v_1, \ldots, v_k >= \{a_1\bar{v}_1, a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k | \, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

یا به‌عبارتی $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ یک مولد است برای $< v_1, \ldots, v_k >$

تذکر ۱-۱۶. فرض کنید که $\{0\} \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی باشد اگر بردارهای $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ به‌گونه‌ای باشد که $V = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ باشد آن‌گاه مجموعه $\{v_1, \ldots, v_k\}$ را یک مولد برای V می‌گوییم.

تعریف ۱-۱۷ (پایه). یک پایه برای زیرفضای V عبارتست از یک مجموعه مولد $\{v_1, \ldots, v_k\}$ به‌طوری‌که $v_1, \ldots, v_k$ مستقل خطی باشد.

مثال ۱-۱۸. $\{i, j, k\}$ در $\mathbb{R}^3$

تذکر ۱-۱۹. فرض کنید $\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_k\}$ پایه‌ای باشد برای V. آن‌گاه برای هر $\bar{v}\in V$، $\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_k,\bar{v}\}$ مستقل خطی نیست. بر اساس فرض: $\bar{v}=a_1\bar{v}_1+\cdots+a_k\bar{v}_k$ در نتیجه، $a_1\bar{v}_1+\cdots+a_k\bar{v}_k=\bar{v}=0$ بنابراین $\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_k,v\}$ مستقل خطی نیست.

نتیجه ۱-۲۰. فرض کنید $\{\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_k\}$ و $\{\bar{w}_1,\dots,\bar{w}_m\}$ دو پایه باشند برای زیرفضای $\bar{v}$. باید $k=m$ باشد.

اثبات. با برهان خلف: فرض کنید $k>m$:

$$\begin{pmatrix}\dots & w_1 & \dots\\ & & \\ \dots & w_m & \dots\end{pmatrix}\xrightarrow{G-J}\left(R_2.\text{سطر صفر ندارد}\right)\qquad \begin{pmatrix}\dots & v_1 & \dots\\ & & \\ \dots & v_k & \dots\end{pmatrix}\xrightarrow{G-J}\left(R_1.\text{سطر صفر ندارد}\right)$$

همچنین سطرهای R_1 و سطرهای R_2 فضای v را تولید می‌کند. حداقل یک مکان پیشرو در R_1 در سطر iــام وجود دارد که در R_2 مکان پیشرو نیست از طرفی داریم

$$R_1 \text{ در } \text{ام}-i \text{ سطر} = a_1(R_2 \text{ ام}-1 \text{ سطر}) + a_2(R_2 \text{ ام}-2 \text{ سطر}) + \cdots + a_m(R_2 \text{ ام}-m \text{ سطر})$$

که تناقض است. $\square$

نتیجه ۱-۲۱. هر دو پایه برای V دارای تعداد اعضای برابر هستند.

تعریف ۱-۲۲ (بُعد یک زیرفضا). تعداد اعضای یک پایه برای V را بُعد زیرفضای V می‌نامیم.
$\dim =$ تعداد اعضای یک پایه برای V.

محاسبه بُعد زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $\bar{v}_1,\bar{v}_2,\dots,\bar{v}_k$:

$$dim\text{Span}\{\ \bar{v}_1,\bar{v}_2,\dots,\bar{v}_k\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\dots & v_1 & \dots\\ & & \\ \dots & v_k & \dots\end{pmatrix}\xrightarrow{G-J}\text{rref}(A)$$

تعداد سطرهای ناصفر $\text{rref}(A)$ برابر است با بُعد زیرفضای تولید شده توسط $\{v_1,\dots,v_k\}$ است.

تمرین ۱-۲۳. نشان دهید $v_1=(0,1,1)$، $v_2=(1,0,1)$ و $v_3=(1,1,0)$ مستقل خطی‌اند.

با استفاده از $a_1\bar{v}_1+a_2\bar{v}_2+a_3\bar{v}_3=0$.

روش دوم:

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{G-J}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(0, a_1, a_1) + (a_2, 0, a_2) + (a_3, a_3, 0) = 0$$

$$a_2 + a_3 = 0$$

$$a_1 + a_3 = 0 \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 0$$

چهار زیرفضای اصلی یک ماتریس:

۱. **فضای سطری** A: زیرفضای تولید شده توسط سطرها در $\mathbb{R}^n$. $Row(A) = \text{Span}\{R_1, \dots, R_m\}$

۲. **فضای ستونی** A: زیرفضای تولید شده توسط ستون‌ها در $\mathbb{R}^m$ $C(A) = \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\}$

۳. **فضای پوچ** A: تمام جواب‌های معادله همگن. زیرفضای جواب‌های معادله همگن $AX = 0$ در $\mathbb{R}^n$.

$$N(A) = \{\bar{X} \mid AX = 0\} \quad \ker(A)$$

۴. **فضای پوچ ماتریس ترانهاده** $A^\top$: تمام جواب‌های معادله همگن $A^\top X = 0$ در $\mathbb{R}^m$ $N(A^\top)$

جلسه هشتم

پایه‌های چهار زیرفضای اصلی

پایه برای $R(A)$:

$$R(A) = R(rref(A)).$$

مثال ۱-۲۴.

$$]rmrref(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{پایه برای } A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

پایه‌ای برای $C(A)$:

$$(EA_{m\times n})_{\circ,j} = EA_{\circ,j}$$

{پس از rref گرفتن، ستون‌های متناظر به ستون‌های یک پیشرو از ماتریس اولیه} = پایه برای C(A)

پایه برای فضای پوچ:

$$E \cdot A\hat{X} = ۰ \Rightarrow rref(A)\hat{X} = ۰$$

مثال ۱-۲۵.

$$rref(A) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}_{۳\times۴} \quad \hat{X} = ۰$$

$x_۱, x_۳$: **متغیر وابسته**

$x_۲, x_۴$: **متغیر آزاد.**

بعد $N(A)$ = تعداد متغیرهای آزاد = تعداد ستون‌هایی از $rref$ که حاوی یک پیشرو نیست. برای بدست آوردن پایه برای فضای پوچ، کافی است به جای متغیرهای آزاد، به‌طور تناوبی ۰ و ۱ بگذاریم و با ضرب در ماتریس $rref$ شده، بقیه متغیرها (متغیرهای وابسته) را بدست می‌آوریم پس

$$\text{N(A) پایه برای} = \left\{ \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ -۲ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \right\}$$

در نتیجه یک عمل سطری استقلال خطی ستون‌ها را حفظ می‌کند.

پایه .. : $rref$ را حساب کرده و ستون‌های متناظر به ستون‌های حاوی ۱ پیشرو از ماتریس اولیه را انتخاب می‌کنیم.

پایه z: سطرهای ناصفر $rref(A^\top)$.

پایه برای $N(A)$: $E.A\hat{X} = ۰ \Rightarrow rref(A)\hat{X} = ۰$

مثال ۱-۲۶.

$$rref(A)\hat{X} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}_{۳\times۴} \quad \hat{X} = ۰ \quad \begin{pmatrix} X_۱ \\ ۰ \\ X_۳ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_۱ \\ ۱ \\ X_۳ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

بُعد فضای $N(A)$ = تعداد متغیرهای آزاد = تعداد ستون‌های $rref(A)$ که حاوی یک پیشرو نیستند.

پایه برای $N(A)$: مجموعه بردارهایی از $\mathbb{R}^n$ که به‌صورت زیر بدست آمده است

مختصات متناظر به متغیرهای وابسته را محاسبه می‌کنیم و مختصات متناظر به متغیرهای آزاد را به‌طور تناوبی ۱ قرار می‌دهیم.

پایه برای $N(A^\top)$: $rref(A)$ را حساب می‌کنیم و متغیرهای آزاد را پیدا کنیم و متناوبا یک قرار می‌دهیم و متغیرهای وابسته را حساب می‌کنیم.

$$A^\top_{n\times m}X = \circ + x_\circ(\text{ستون اول } A^\top) + x_۲(\text{ستون دوم } A^\top) + \cdots + x_m(\text{ستون m- ام } A^\top)$$
$$\Rightarrow x_۱(\text{سطر اول A}) + x_۲(\text{سطر دوم A}) + \cdots + x_m(\text{سطر ام A m}) = \circ$$

مثال ۱-۲۷. چهار فضای اصلی A را محاسبه کنید.

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & \circ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \circ & -۲ & -۲ \\ \circ & -۱ & -۲ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۱ & \circ & ۱ \\ \circ & ۱ & ۱ \\ \circ & \circ & ۱ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{pmatrix} = rref(A)$$

$$Row(A) = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ \\ ۱ \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ ۱ \end{pmatrix} \right\} \quad C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ \\ \circ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \right\} \quad N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \right\} = \{\,\}$$

جلسه نهم

ضرب داخلی و تعامد

ضرب داخلی استاندارد:

$$(x_۱, \ldots, x_n) \cdot (y_۱, \ldots, y_n) = \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i$$

اولین استفاده:

$$\| \hat{X} \|^۲ = \hat{X} \cdot \hat{X} = \sum x_i^۲$$

دومین استفاده:

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = 0 \Rightarrow \hat{x} \perp \hat{y}$$

فضای پوچ ماتریس ترانهاده:

$$A_{m\times n} \Rightarrow A^{\top}_{n\times m} \quad N(A^{\top}) = \{\hat{X} \in \mathbb{R}^m | \, A^{\perp}\hat{X} = 0\} = \{\hat{X} \in \mathbb{R}^m | \, A\} = \{\hat{X} \in \mathbb{R}^m | \, \hat{X} \perp C(A)\}$$

محاسبات :

$$A^{\top}\hat{X} = \hat{0} \quad (A^{\top}\hat{X}) = \hat{0}^{\top} = 0 \Rightarrow X^{\top}(A^{\top})^{\top} = 0 \Rightarrow X^{\top}_{1\times m}A_{m\times n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{X}_{\circ}\hat{A} = 0 & \hat{X} \perp \hat{A}_{\circ,r} \\ \vdots & \\ \hat{X}_{\circ}A_{\circ,n} = 0 & \hat{X} \perp \hat{A}_{\circ,n} \end{cases}$$

یعنی X بر تمام بردارهای $C(A)$ عمود است به عبارتی $\hat{X} \cdot \hat{v} = 0 : \hat{v} \in C(A)$

حال برای بدست آوردن پایه برای فضای $N(A^{\top})$، $N(A^{\top}) = C(A)^{\perp}$. مجموعه تمام بردارهایی از $\mathbb{R}^m$ که به تمام بردارهای $C(A)$ عمود باشند. تمام سطرهای که ضرب آن‌ها در ستون‌های A برابر صفر شود.

$$(A_{m\times n}|I) \xrightarrow{rref} (rref(A)|E) \Rightarrow E_{\times m}A_{m\times n} = rref(A)$$

سطرهایی از E که متناظر با سطرهای صفر $rref(A)$ $m =$ سطرهای ناصفر $rref(A)$ هستند، پایه‌های فضای $N(A^{\perp})$ نیز هستند.

تذکر ۱-۲۸. رتبه سطری = بعد فضای سطری = تعداد سطرهای ناصفر = rref(A) تعداد یک‌های پیشرو

رتبه ستونی = بعد فضای ستونی $R(A)$ = تعداد ستون‌های حاوی یک پیشرو = تعداد یک‌های پیشرو

رتبه ماتریس $A_{m\times n}$**:** مرتبه ماتریس برابر است با بعد فضای سطری **(**بعد فضای ستونی**)** $rank(A)$

قضیه ۱-۲۹. برای $A_{m\times n}$،

$$\begin{cases} \dim N(A) = null(A) \\ \dim \operatorname{Ker}(A) = null(A) \end{cases} \qquad \begin{cases} rank(A) = \dim(R(A)) \\ \dim C(A) \end{cases} \qquad n = null(A) + rank(A)$$

= تعداد متغیرهای آزاد = تعداد کل متغیرها = تعداد متغیرهای وابسته− تعداد یک‌های پیشرو $-n$ = $null(A)$ = $n - rank(A)$.

مثال ۱-۳۰. چهار فضای اصلی ماتریس $B = \left(\begin{smallmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ & -۱ & -۱ \end{smallmatrix}\right)$ را با بدست آوردن یک پایه بدست آورید.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} ۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} ۱ & ۲ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & -۲ & ۱ \end{array}\right)$$

$$R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right\} \quad C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \right\} \quad N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$$

و $N(A^\top) = \{۰\} = \{ \quad \}$.

جلسه دهم

تصویر و تعامد: فرض کنید که $v \in \mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است.
یادآوری: $v, w \in V \Rightarrow \alpha\hat{v} + \beta\hat{w} \in V$

تعریف ۱-۳۱ (تعامد)**.** بردار $\hat{\omega}$ عمود بر زیرفضای V گویند هرگاه $\hat{w}$ بر تمام بردارهای V عمود باشد.

تذکر ۱-۳۲. از هر نقطه خارج از V فقط یک عمود می‌توان بر V رسم کرد.

تعریف ۱-۳۳ (تصویر یک بردار بر یک زیرفضا)**.** برداری که اختلاف $\hat{v}$ و $\hat{p}$ کمترین مقدار را بین تمام $\hat{v} - \hat{w}$ که $\hat{w} \in V$ باشد معادلا برداری که انتهای آن پایه عمود بردار v است.

$$\| \hat{v} - \hat{p} \| = \min \| \hat{v} - \hat{w} \| = proj_V \hat{v}$$

پایه متعامد برای v: یک پایه $\{v_۱, \dots, v_k\}$ به‌طوری‌که $i \neq j$ $(v_i \perp \hat{v}_j)$ $\hat{v}_i \cdot \hat{v}_j = ۰$.
پایه برای v: عبارتست از $\{v_۱, \dots, v_n\}$ به‌طوری‌که مستقل خطی باشد و زیرفضای V را تولید می‌کند ($\dim(V) = k$).

$$\left\{ \frac{\hat{v}_۱}{\| \hat{v}_۱ \|}, \frac{\hat{v}_۲}{\| \hat{v}_۲ \|}, \dots, \frac{\hat{v}_k}{\| \hat{v}_k \|} \right\} : \text{متعامد یکه} \Leftarrow \text{متعامد}$$

پایه یکه متعامد: پایه‌ای متعامد و طول هر عضو پایه برابر یک است.

لم ۱-۳۴. یک پایه $\{v_۱, \dots, v_k\}$ از زیرفضای برداری V متعامد است اگر و فقط اگر برای هر بردار $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$.

تصویر $\hat{v}$ بر زیرفضای $V =$ جمع تصاویر $\hat{v}$ بر روی اعضای پایه $\{\hat{w}_۱, \dots, \hat{w}_k\}$

اثبات. $\{w_۱, \dots, w_k\}$ پایه متعامد است آن‌گاه

$$\text{Proj}\hat{v} = \frac{\hat{v} \cdot \hat{v}_۱}{\| v_۱ \|^۲}\hat{v}_۱ + \cdots + \frac{\hat{v} \cdot \hat{v}_k}{\| v_k \|^۲}\hat{v}_k$$

برای اثبات بالا باید رابطه بالا را اثبات کنیم. باید نشان دهیم

$$V \perp \hat{v} = \left(\frac{\hat{v} \cdot \hat{v}_۱}{\| v_۱ \|^۲}\hat{v}_۱ + \cdots + \frac{\hat{v} \cdot \hat{v}_k}{\| v_k \|^۲}\hat{v}_k \right)$$

کافیست نشان دهیم

$$\hat{v}_۱ \cdot \left(\hat{v} - \frac{\hat{v} \cdot \hat{v}_۱}{\| v_۱ \|^۲}\hat{v}_۱ - \cdots - \frac{\hat{v} \cdot \hat{v}_k}{\| v_k \|^۲}\hat{v}_k \right) = \hat{v}_۱ \cdot \hat{v} - \hat{v}\frac{\hat{v} \cdot \hat{v}_۱}{\| v_۱ \|^۲}\hat{v}_۱ = ۰$$

به‌طور مشابه برای بقیه قابل اثبات است.

$\Rightarrow$: اگر تصویر بر v برابر باشد با جمع تصاویر بر پایه $\Leftarrow$ پایه متعاد است.

$\square$

جلسه یازدهم

الگوریتم گرام اشمیت $\text{Gram} - \text{Schmidt}$

پایه برای یک زیرفضای v:

$$\{v_۱, \dots, v_n\} \Rightarrow \text{پایه متعامد می‌سازد} \Rightarrow \text{پایه متعامد یکه}$$

$$\begin{aligned}
q'_۱ &= \hat{v}_۱ \\
q'_۲ &= \hat{v}_۲ - \text{Proj}_{\hat{v}_۱}\hat{v}_۲ = \hat{v}_۲ - \frac{\hat{v}_۱ \cdot \hat{v}_۲}{\hat{v}_۱ \cdot \hat{v}_۲}\hat{v}_۱ \\
q'_۳ &= \hat{v}_۳ - \text{Proj}\hat{v}_۳ = \hat{v}_۳ - \text{Proj}\hat{v}_۳ = \hat{v}_۳ - \frac{\hat{v}_۳ \cdot q'_۱}{q'_۱ \cdot q'_۱} - \frac{\hat{v}_۳ \cdot q'_۲}{q'_۲ \cdot q'_۲}q'_۲ \\
\hat{q}' &= \hat{v}_۴ - \frac{\hat{v}_۴ \cdot q'_۱}{q'_۱ q'_۱}q'_۱ - \frac{\hat{v}_۴ \cdot q'_۲}{q'_۲ \cdot q'_۲}q'_۲ - \frac{\hat{v}_۴ \cdot q'_۳}{q'_۳ \cdot q'_۳}q'_۳ \\
&\vdots \\
q'_n &= \hat{v}_n - \sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{\hat{v}_n \cdot q'_i}{q'_i \cdot q'_i}q'_i
\end{aligned}$$

$$\text{پایه متعامد} \longrightarrow \{q'_۱, \dots, q'_n\}$$

$$\text{پایه یکه متعامد} \rightarrow \begin{cases} q_۱ = \frac{q'_۱}{\|q'_۱\|} \\ \vdots \\ q_n = \frac{q'_n}{\|q'_n\|} \end{cases}$$

مثال ۱-۳۵. سه بردار $v_۱ = (۱, ۱, ۳, ۳)$، $v_۲ = (۳, ۱, -۱, ۱)$ و $v_۳ = (۱, ۱, ۱, ۱)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از روند گرام- اشمیت یک پایه متعامد و یک پایه متعامد یکه استخراج کنید.

$$q'_۱ = v_۱ = (۱, ۱, ۳, ۳)$$

$$q'_۲ = (۳, ۱, -۱, ۱) - \frac{(۳, ۱, -۱, ۱) \cdot (۱, ۱, ۳, ۳)}{|(۱, ۱, ۳, ۳)|^۲}(۱, ۱, ۳, ۳) = (۳, ۱, -۱, ۱) - \left(\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۳}{۵}\right) = \left(\frac{۱۴}{۵}, \frac{۴}{۵}, -\frac{۸}{۵}, \frac{۲}{۸}\right)$$

$$q'_۳ = (۱, ۱, ۱, ۱) - \frac{(۱, ۱, ۱, ۱) \cdot (۱, ۱, ۳, ۳)}{|(۱, ۱, ۳, ۳)|^۲} \cdot (۱, ۱, ۳, ۳) - \frac{(۱, ۱, ۱, ۱) \cdot \left(\frac{۱۴}{۵}, \frac{۴}{۵}, -\frac{۸}{۵}, \frac{۲}{۵}\right)}{\frac{۲۸۰}{۲۵}} \cdot q'_۲ =$$

$$= (۱, ۱, ۱, ۱) - \left(\frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۵}, \frac{۶}{۵}, \frac{۶}{۵}\right) - \frac{۳}{۱۴} \cdot \left(\frac{۲۵}{۵}, \frac{۴}{۵}, -\frac{۸}{۵}, \frac{۲}{۵}\right) = \left(۰, \frac{۳}{۷}, \frac{۱}{۷}, -\frac{۲}{۷}\right)$$

$$q_۱ = \frac{(۱, ۱, ۳, ۳)}{\sqrt{۲۰}}, \quad q_۲ = \frac{(۱۴, ۴, -۸, ۲)}{۲\sqrt{۲۰}}, \quad q_۳ = \frac{(۰, ۳, ۱, -۲)}{\sqrt{۱۴}}.$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲\sqrt{۵}} & \frac{۷}{\sqrt{۷۰}} & ۰ \\ \frac{۱}{۲\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۷۰}} & \frac{۳}{\sqrt{۱۴}} \\ \frac{۳}{۲\sqrt{۵}} & -\frac{۴}{\sqrt{۷۰}} & \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \\ \frac{۳}{۲\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۷۰}} & -\frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \end{bmatrix}_{۴\times۳}$$

$$v_۱ = R_{۱۱} \begin{pmatrix} \vdots \\ q_۱ \\ \vdots \end{pmatrix} + R_{۲۱} \begin{pmatrix} \vdots \\ q_۲ \\ \vdots \end{pmatrix} + R_{۳۱} \begin{pmatrix} \vdots \\ q_۳ \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow v_۱.q_۱ = R_{۱۱}q_۱q_۱ \Rightarrow R_{ij} = \hat{v}_j.\hat{q}_i$$

$$R_{۱۱} = \hat{q}_۱ \cdot \hat{v}_۱ = ۲\sqrt{۵}$$
$$R_{۱۲} = \hat{q}_۱ \cdot \hat{v}_۲ = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$
$$R_{۱۳} = \hat{q}_۱ \cdot \hat{v}_۳ = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$R_{۳\times۳} = \begin{pmatrix} ۲\sqrt{۵} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۴}{\sqrt{۵}} \\ ۰ & \frac{۲۸}{۷۰} & \frac{۶}{۷۰} \\ ۰ & ۰ & \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \end{pmatrix}, \qquad A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_{n\times n}$$

$$A_{m\times n} : \begin{cases} Full\,rank & (\text{ستون‌ها مستقل خطی‌اند}) \\ Tall & (m \geq n) \end{cases}$$

$Q_{m\times n}$: ستون‌ها بردارهای متعامد یکه‌اند.

$R_{n\times n}$: بالا مثلثی و معکوس‌پذیر.

۱.۱ محاسبه تصویر بردارها بر زیرفضای تولید شده توسط n بردار

مستقل خطی $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ در $\mathbb{R}^m$ که $m \geq n$.

$$V = span\{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}\,, \; \mathrm{Proj}_V \hat{b} = (Matrix)_{m\times m} \hat{b}_{m\times ۱} \quad \forall \hat{b} \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathrm{Proj}_V \hat{b} = \alpha_۱ \hat{v}_۱ + \cdots + \aleph_n \hat{v}_n\,, \; (\hat{v}_i)_{m\times ۱} \quad ۱ \leq i \leq n.$$

$$\mathrm{Proj}_V \hat{b} = (Pb_۱, \ldots, Pb_m)$$

$$\mathrm{Proj}_V \hat{b} = \hat{P} \qquad A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_۱ & v_۲ & \ldots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{b}-\hat{P}\perp C(A)\to \hat{b}-\hat{P}\in C(A)^{\perp}=N(A^{\perp})\to$$
$$\to A^{\perp}_{n\times m}(\hat{b}-\hat{P})=0\to A^{\top}(\hat{b}-\hat{P})=0\to A^{\top}\hat{b}=A^{\top}\hat{P}\to AA^{\top}\hat{b}=AA^{\top}\hat{P}$$

$AA^{\top}_{m\times m}$ معکوس‌پذیر نیست

پس $A\hat{X}=\hat{b}$ سازگار است.(جواب دارد).

$$A^{\top}\hat{b}=A^{\top}\hat{P}\to A^{\top}_{n\times n}A_{m\times n}\hat{X}_{n\times 1}=A^{\top}\hat{P}$$
$$A^{\top}A\Rightarrow A^{\top}A=B\to B_{n\times n}\hat{X}=0\leftrightarrow \hat{X}=0$$
$$X\in\mathbb{R}^{n}\,,\,y\in\mathbb{R}^{m}\qquad <AX,y>=\sum_{i}\sum_{j}a_{ij}X_{j}y_{i}$$
$$AX=\begin{bmatrix}a_{1n} & a_{1n}\\ a_{m1} & a_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1}\\ x_{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{n}a_{1j}X_{j}\\ \sum_{j=1}^{n}a_{mj}X_{j}\end{bmatrix}$$
$$<\hat{X},A^{\top}y>=\sum_{j}\sum_{i}a^{\top}_{ji}Xy_{i}X_{j}$$
$$\to <A^{\top}u,X>=<AX,y>$$
$$A^{\top}AX=0\to <A^{\top(AX),X}>=<AX,AX>=0$$
$$\to\| AX\|^{2}=0\Rightarrow A_{m\times n}X=0\Rightarrow X=0\to (A\,full\,rank)\,n=0+rank\to rank=n$$

$\to$ معکوس‌پذیر است $A\to$ معکوس‌پذیر است $A^{\top}A$

$$A^{\top}A\hat{X}=A^{\top}\hat{P}\to (A^{\top}A)^{-1}A^{\top}A\hat{X}=(A^{\top}A)^{-1}A6\top\hat{P}$$
$$\to \hat{X}(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}\hat{P}\to \hat{X}=(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}\hat{b}$$
$$P=\mathrm{Proj}_{V=C(A)}b\to A^{\top}\hat{b}=A^{\top}P$$

(۲) $<AX,y>=<X,A^{\top}y>\to A^{\top}A$ معکوس‌پذیر است

$if\,Abe\,full\,rank\,and\,tall\Rightarrow if\,A\hat{X}=\hat{b}$ سازگار باشد

$$\to A^{\top}AX=A^{\top}\hat{b}=A^{\top}\hat{P}\Rightarrow X=(A^{\top}A)A^{\top}\hat{b}$$

(۳) $A\hat{X}=\hat{b}\Rightarrow$ سازگار نیست (جواب ندارد.)

حداقل مربعات

زیرفضای $V \in \mathbb{R}^n$ را با پایه $\{v_۱, v_۲, \dots, v_k\}$ در نظر بگیرید.

۱.۱.۱ تصویر بردارها به زیرفضای V

ماتریس تصویر $[\,\mathrm{Proj}_V\,]_{n\times n}$ که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\text{تصویر } \hat{b} \text{ بر زیرفضای } V = \left[Prj_V\right]\hat{b}_{n\times ۱}$$

$$\mathrm{Proj}_V\hat{b} = \hat{P} \qquad s.t\,\hat{b} - \hat{P} \perp V$$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_۱ & v_۲ & \dots & v_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{n\times k} \qquad \begin{cases} tall \\ k \le n \\ full\,rank \end{cases}$$

$V = C(A)$.

۱. $\hat{P}$ در فضای ستونی A است.

$$A\bar{X} = \hat{P} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_۱ \\ \vdots \\ \bar{X}_k \end{pmatrix} \tag{۴}$$

۲. $\hat{b} - \hat{P}$ عمود بر فضای ستونی است A

$$\hat{b} - \hat{P} \in C(A)^\perp = N(A^\top) \to A^\top(\hat{n} - \hat{P}) = ۰ \tag{۵}$$

با استفاده از (۴) و (۵) داریم

$$\Rightarrow A^\top(\hat{b} - A\bar{X}) = A^\top\hat{b} - A^\top A\bar{X} = ۰$$

$$A^\top A\bar{X} = A^\top b \to \text{همواره جواب دارد.}$$

$$A_{n\times k}\,,\, A^\top_{k\times n} \to (A^\top A)_{k\times k} \to \text{معکوس‌پذیر است}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = (A^\top A)^{-۱}A^\top\hat{b}$$

$$\to \hat{P} = A(A^\top A)^{-۱}A^\top\hat{b}$$

نتیجه ۱-۳۶.

$$\mathrm{Proj}_V \hat{b} = \underbrace{A(A^\top A)^{-1} A^\top}_{\text{ماتریس تصویر}} \hat{b}$$

حال با استفاده از تجزیه $A = QR$.

$$\begin{aligned} &\hat{P} = A(A^\top A)^{-1} A^\top \hat{b} \to QR((QR)^\top QR)^{-1}(QR)^\top = \\ &= QR(R^\top Q^\top QR)^{-1} R^\top Q^\top \to Q^\top Q = I_{k\times k} \\ &\to QR(R^\top R)^{-1} R^\top Q^\top \xrightarrow{R \text{ معکوس‌پذیر}} QRR^{-1}(R^\top)^{-1} R^\top Q^\top \to \hat{P} = QQ^\top \end{aligned}$$

نتیجه ۱-۳۷.

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{k\times n} = Q_{k\times n} R_{n\times n}$$

$$Q^\top Q = I$$

$QQ^\top = \hat{P} = \mathrm{Proj}_V \hat{b} = \{v_1, \dots, v_k\}$ تصویر به روی زیرفضای تولید شده توسط

حداقل مربعات

اگر $A_{k\times n}$ ماتریس $tall$ و $full\,rank$ باشد آن‌گاه $AX = \hat{b}$.

$\bar{x}$ را پیدا می‌کنیم به‌طوری‌که نزدیک‌ترین بردار باشد به جواب $A\hat{X} = b$.

راه حل: فاصله $A\bar{X}$ را تا $\hat{b}$، $\min$ می‌کنیم.

$$A\hat{X} = \hat{b} \to \text{ناسازگار} \to A\bar{X} = \hat{P} \xrightarrow{A \text{ معکوس‌پذیر نیست}} \bar{X} = \underbrace{(A^\top A)^{-1} A^\top}_{A \text{ شبه معکوس ماتریس}} \hat{b}$$

یک شبه معکوس برای ماتریس $A_{m\times n}$ عبارتست از $A^+_{m\times n}$ که دارای خواص زیر باشد:

۱. $A^+AA^+ = A^+$.

۲. $AA^+A = A$.

۳. $A^\top A \,,\, AA^\top$، ماتریس‌های متقارن باشند یعنی ترانهاده آن‌ها، خودشان است.

تذکر ۱-۳۸. اگر $A_{m\times n}$، $tall$ و $full\,rank$ باشد آن‌گاه شبه معکوس A عبارت است از ماتریس A^+ به‌طوری‌که $\bar{X}=A^+b$ که در آن $\bar{X}$ جواب حداقل مربعات است. پس

$$A^+=(A^\top A)^{-۱}A^\top$$

$$\xrightarrow{A=QR} A^+=((QR)^\top QR)^{-۱}(QR)^\top=(R^\top Q^\top QR)^{-۱}R^\top Q^\top=\begin{cases}Q^\top Q=I\\ QQ^\top=\hat{P}\\ R^-Q^\top=A^+\end{cases}$$

$$=R^{-۱}Q^\top\rightarrow A^+=R^{-۱}Q^\top\rightarrow$$

$$if\,A_{n\times n}=QR\rightarrow \text{معکوس‌پذیر}\rightarrow \text{شبه معکوس}\ A\rightarrow A^+$$

A^+ معکوس A در حالتی‌که A معکوس‌پذیر باشد $\leftarrow R^{-۱}Q^\top$.

$$\text{بالا مثلثی}\ R\rightarrow R^{-۱}=\begin{bmatrix}a&b&c\\ ۰&d&e\\ ۰&۰&f\end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{a}&\frac{-b}{ad}&\frac{be-cd}{afd}\\ ۰&\frac{۱}{a}&\\ ۰&۰&\frac{۱}{f}\end{bmatrix}$$

مثال ۱-۳۹. خط حداقل مربعات را برای رگرسیون خطی مجموعه داده $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)\ldots,(x_n,y_n)$ بیابید.

دنبال $\bar{a}$ و $\bar{b}$ هستیم که

$$\begin{cases}\bar{y}_۱=\bar{a}x_۱+\bar{b}\\ \vdots\\ y_n=\bar{a}x_n+\bar{b}\end{cases}$$

پس باید

$$\|\ (y_۱,\ldots,y_n)-(\bar{y}_۱,\ldots,\bar{y}_n)\ \|$$

مینیمم شود یعنی $\sum_{i=۱}^{n}(y_i-\bar{y}_i)^۲$ مینیمم شود.

$$\begin{cases}ax_۱+b=\bar{y}_۱\\ \vdots\\ ax_n+b=\bar{y}_n\end{cases}\qquad\Rightarrow \text{ناسازگار}$$

پس

$$\begin{bmatrix} x_۱ & ۱ \\ x_۲ & ۱ \\ \vdots & \vdots \\ x_n & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_۱ \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = R^{-۱} Q^{\top} \begin{bmatrix} y_۱ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱-۴۰. خط حداقل مربعات $y = ax + b$ را بیابید که نقاط دیتای $(-۱, ۰)$ و $(۱, ۱)$ و $(۲, ۳)$ را فیت کند.

$$\begin{cases} -۱a + b = ۰ \\ ۱a + b = ۱ \\ ۲a + b = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$\rightarrow AX = C \rightarrow$ این دستگاه سازگار است $\rightarrow A\, is\, tall\, and\, full\, rank$

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = A^{+} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{+} = (A^{\top}A)^{-۱}A^{\top}$$

$$A^{\top}A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{\top}A)^{-۱} = \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} -۵ & ۱ & ۴ \\ ۸ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} -۵ & ۱ & ۴ \\ ۸ & ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۳}{۱۴} \\ \frac{۵}{۷} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{خط حداقل مربعات} \Rightarrow y = \frac{۱۳}{۱۴}x + \frac{۵}{۷}$$

$$\text{خطای حداقل مربعات} = \| y - \bar{y} \|^{۲} =$$
$$\text{خطا} = \| y - \bar{y} \|^{۲} = (\bar{y}_{۱} - y_{۱})^{۲} + (\bar{y}_{۲} - y_{۲})^{۲} + (\bar{y}_{۳} - y_{۳}) =$$
$$= (\frac{-۳}{۱۴} - ۰)^{۲} + (\frac{۲۳}{۱۴} - ۱)^{۲} + (\frac{۱۸}{۷} - ۳)^{۲} =$$
$$= \frac{۹}{۱۹۶} + \frac{۸۱}{۱۹۶} + \frac{۳۶}{۱۹۶} = \frac{۱۲۶}{۱۹۶} = \frac{۶۳}{۹۸} \Rightarrow \text{کمترین خطا}$$

مثال ۱-۴۱. ماتریس تصویر به زیرفضای W را محاسبه کنید (با استفاده از تجزیه QR).

$$V = span\left\{ a_{۱} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \ a_{۲} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \\ ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}, \ a_{۳} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \right\}$$

مثال ۱-۴۲. شبه معکوس ماتریس A را بیابید.

$$q_{۱} = \frac{\hat{a}_{۱}}{\| a_{۱} \|} = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$$
$$q'_{۲} = \hat{a}_{۲} - (a_{۲} \cdot q_{۱})q_{۱} = (-\frac{۵}{۲}, \frac{۵}{۲}, \frac{۵}{۲}, -\frac{۵}{۲})$$
$$q_{۲} = \frac{q'_{۲}}{\| q'_{۲} \|} = (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$$
$$q'_{۳} = \bar{a}_{۳} - (a_{۳} \cdot q_{۱})q_{۱} - (a_{۳} \cdot q_{۲})q_{۲} = (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, -۲)$$
$$q_{۳} = \frac{q'_{۳}}{\| q'_{۳} \|} = (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$$

$$Q = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{۱} & q_{۲} & q_{۳} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} a_{۱}q_{۱} & a_{۲}q_{۱} & a_{۳}q_{۱} \\ ۰ & a_{۲}q_{۲} & a_{۳}q_{۲} \\ ۰ & ۰ & a_{۳}q_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A = QR \Rightarrow \mathrm{Proj}_V = QQ^\top$$

$$\mathrm{Proj} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$A^+ = R^{-1}Q^\top$$

۲.۱.۱ تبدلات خطی

نگاشتی است بین فضاهای برداری $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m$

$$T(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}) = \alpha T(\hat{x}) + \beta T(\hat{y}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\, \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^m$$

شزایط و ویژگی آن

$$T(0) = 0 \Leftrightarrow T(\hat{n} - \hat{m}) = T(\hat{x}) - T(\hat{x}) = 0$$

مثال ۱-۴۳. ۱. تصویر یک زیرفضا (مثلا تصویر در $\mathbb{R}^3$ بروی صفحه xy)

۲. دوران با زاویه θ در $\mathbb{R}^2$ (بردار x را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به اندازه θ دوران می‌کند.)

۳. انعکاس در $\mathbb{R}^3$ نسبت به یک صفحه گذرا از مبدا.

تذکر ۱-۴۴. یک تبدیل خطی می‌تواند از یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ به یک زیرفضای $\mathbb{R}^m$ برود.

$$T_1 : R^3 \to \mathbb{R}^2 \quad or \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

اثبات.

$$T_1(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) = T_1(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) =$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = \alpha T_1 + \beta T_2$$
$$T_2(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$T_3 \Rightarrow \mathrm{Refl} = 2\,\mathrm{Proj} - \text{نگاشت همانی}$$

که نگاشت همانی، هر بردار را به خودش می‌برد.

□

مثال ۱-۴۵. برای یک ماتریس $A_{m\times n}$،

$$\mu_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\hat{x} \mapsto A\hat{x}$$

فضای برداری مجرد

یک مجموعه ناتهی V به همراه یک عمل جمع $(+)$ و یک عمل ضرب اسکالر (S) که در خواص زیر صدق می‌کند:

$$+ : V \times V \to V$$

۱. جابه‌جایی جمع

$$(w, v) \longrightarrow w + v$$
$$S : V \times \mathbb{R} \longrightarrow V$$
$$(v, \alpha) \longrightarrow \alpha v$$
$$\forall \hat{v}, \hat{w} \in V \quad \hat{v} + \hat{w} = \hat{w} + \hat{v}$$

۲. اشتراک پذیری جمع

$$(v, \alpha) \longrightarrow \alpha v$$
$$\forall v, w, u \in V \longrightarrow (u + v) + w = (u + v) + w$$

به عبارت دیگر پرانتزگذاری تاثیری در جمع ندارد.

۳. عضو خنثی جمع

$$\exists! O \in V \; s.t \, \forall v \in V \quad O + \hat{v} = \hat{v} + O = \hat{v}$$

۴. عضو قرینه جمع

$$\forall v \in V \quad v + v' = O$$

۵. اشتراک پذیری ضرب

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\,,\ \forall v \in V \qquad \alpha_1(\alpha_2 \hat{v}) = (\alpha_1\alpha_2)\hat{v}$$

۶. توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع

$$\alpha_1(\hat{v} + \hat{w}) = \alpha_1\hat{v} + \hat{w}$$

۷. توزیع پذیری جمع نسبت به ضرب

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\hat{v} = \alpha_1\hat{v} + \alpha_2\hat{v}$$

۸. عضو خنثی ضرب اسکالر

$$1\hat{v} = \hat{v}$$

مثال ۱-۴۶. ۱. $\{0\}$ فضای برداری ۰

۲. $\mathbb{R}$

۳. $\mathbb{R}^n$

۴. زیرفضاهای خطی $\mathbb{R}^n$

۵. فضای تمام ماتریس‌های ($M_{3\times 4}$) در تناظر یک به یک با $\mathbb{R}^{12} = (\mathbb{R}^3)^4$

۶. برای m و n ثابت، تمام ماتریس‌های $m \times n$ ($M_{m\times n}$)

۷. فضای تمام چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی (P)

چندجمله‌ای $P = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n |\, n \in \mathbb{N}\, a_i \in \mathbb{R}\}$

$\to$ مستقل خطی‌اند $\to$ اگر به‌عنوان تابع باشد $\equiv a_1 + a_2x + \cdots + a_{10}x^{10} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_{10} = 0$

$\to$ متغیر است n چون $\to$ دارای بینهایت بعد است $\Rightarrow$ بعد نامتناهی است

$P_n = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n |\, a_i \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

بعد متناهی است چون n ثابت است $\to$ $n+1$ پایه دارد $\to$ بعد $n+1$ است

۸. توابع پیوسته

$$C(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\, \text{پیوسته } f\,\}$$

فضای برداری است $\leftarrow$ نامتناهی البعد

۹. فضای برداری که مشتق $k-$ام آن‌ها پیوسته است $[C^k ۹ \mathbb{R}]$

تبدلات خطی (برای فضای مجرد)

نگاشت T که دارای خاصیت زیر باشد

$$V \xrightarrow{T} W$$

$$T(\alpha\hat{v}_۱ + \beta\hat{v}_۲) = \alpha T(\hat{v}_۱) + \beta T(\hat{v}_۲) \quad [T(\circ) = \circ]$$

استقلال خطی (برای فضای مجرد)

بردارهای $v_۱, \ldots, v_k$ را مستقل خطی گوییم اگر

$$\alpha_۱\hat{v}_۱ + \alpha_۲\hat{v}_۲ + \cdots + \alpha_k\hat{v}_k = \circ \quad \alpha_۱ = \alpha_۲ = \cdots = \alpha_k = \circ$$

استقلال خطی برای $A \in V$

زیرمجموعه A مستقل خطی است اگر هر تعداد متناهی از اعضایش مستقل خطی باشد.

مثال ۱–۴۷. $\{۱, x, x^۲, \ldots\}$ مجموعه مستقل خطی است از فضای چندجمله‌ای

پایه (برای زیرفضای مجرد)

یک زیرمجموعه B که مستقل حطی باشد و فضا را تولید کند (مجموعه ترکیب اعضای متناهی خود فضا شود.)

مثال ۱–۴۸. ۱. برای هر ماتریس $A_{m\times n}$:

$$T_A : \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}^m$$

$$\hat{X} \to A\hat{X} \xrightarrow{\text{چون}} A(\alpha x + y) = \alpha A\hat{X} + \beta A\hat{y}$$

۲. دوران در $\mathbb{R}^۲$ حول مبدا به اندازه زاویه θ در جهت خلاف عقربه ساعت

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

دروان در $\mathbb{R}^۳$ حول محور x $R_{x\theta} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ ۰ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

دوران در $\mathbb{R}^۳$ حول محور y $R_{y\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & ۰ & \sin(\theta) \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -\sin(\theta) & ۰ & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

دوران در $\mathbb{R}^۳$ حول محور z $R_{z\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & ۰ \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳. تصویر روی زیرفضایی با پایه $q_۱, q_۲, \dots, q_n$، $\{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$

$$A = (v_۱|v_۲|\dots|v_n) \to QR \qquad \text{Proj} = QQ^T$$

انعکاس حول یک زیرفضا $w = span\{\hat{v}_۱, \dots, \hat{v}_k\}$

$$\hat{x} + \text{Refl}_w \hat{X} = ۲\text{Proj}_W \hat{X}$$

$$\text{Refl}_W \hat{X} = ۲QQ^T - I$$

تذکر ۱-۴۹. مشتق و انتگرال تبدیلات خطی هستند.

$$D : P \to P$$

$$a_۰ + a_۱x + \dots + a_nx^n \longrightarrow a_۱ + ۲a_۲x + ۳a_۳x^۲ + \dots + na_nx^{n-۱}$$

مختصات در پایه

فرض کنید V یک فضای برداری باشد با بعد متناهی و پایه $B = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$

$$\forall \hat{v} \in V \quad \hat{V} = a_1\hat{v}_1 + a_2\hat{v}_2 + \cdots + a_n\hat{v}_n$$

مثال ۱-۵۰.

$$P_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_i \in \mathbb{R}\} \quad P_3 \text{ پایه برای } P = \{1, x, x^2, x^3\}$$

مثال ۱-۵۱. اگر v دو نمایش داشته باشد به‌صورت‌های زیر آیا می‌توان گفت ضرایب با هم برابرند؟

$$\begin{aligned}
&V = a_1\hat{v}_1 + a_2\hat{v}_2 + \cdots + a_n\hat{v}_n = b_1\hat{v}_1 + b_2\hat{v}_2 + \cdots + b_n\hat{v}_n \\
&\to (a_1 - b_2)\hat{v}_1 + \cdots + (a_n - b_n)\hat{v}_n = 0 \\
&\to a_i = b_i \quad 1 \le i \le n
\end{aligned}$$

تذکر ۱-۵۲. V فقط یک نمایش در پایه دارد. بنابراین در پایه B، هر بردار $\hat{v}$ با یک بردار $n-$تایی **یکتا** نمایش داده می‌شود.

$$[V]_B = < a_1, a_2, \ldots, a_n > \xrightarrow{\text{یعنی}} \hat{V} = \hat{v}_1 a_1 + \cdots + a_n\hat{v}_n$$

پس این بردار مختصات $\hat{V}$ در پابه B گفته می‌شود.

نمایش ماتریس تبدیلات خطی

فرض کنید V و W فضای مجرد هستند و $\dim(W) = m$ و $\dim(V) = n$ و تبدیل خطی $V \xrightarrow{T} W$ را در نظر بگیرید:

فرض کنید B_V و B_W پایه باشند برای V و W.

$$\begin{aligned}
&V^n \xrightarrow{T} W^m \\
&\Rightarrow T(\hat{V}) = \underbrace{[T]_{B_W}^{B_V}}_{T \text{ نمایش ماتریس}} \underbrace{< a_1, a_2, \ldots, a_n >}_{B_W \text{ نمایش بردار } \hat{V} \text{ در پایه}} = \underbrace{< \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m >}_{B_W \text{ نمایش } T(V) \text{ در پایه}}
\end{aligned}$$

$$[T]_{B_W}^{B_V} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ T(v_1) & \ldots & T(v_n) \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱-۵۳. P_3 را در نظر بگیرید با پایه $\{1, x, x^2, x^3\}$. عملگر مشتق $P_3 \xrightarrow{D} P_3$ که $P_3 \to P_2$ یک تبدیل خطی است.

$$P_3 \xrightarrow{D} P_3 : [D] = \begin{array}{c} \begin{matrix} D(1) & D(m) & D(m^2) & D(m^3) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} \end{array}$$

$$P_3 \xrightarrow{D} P_2 : [D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

تغییر پایه

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \longrightarrow \text{مثال ساده}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ پایه استاندارد } St_{\mathbb{R}^n} = \{e_1, \dots, e_n\} \quad e_i = <0, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ام}}, 0, 0>$$

$$Sr_{\mathbb{R}^m} = \{e'_1, \dots, e'_n\} \quad e'_i = <0, 0, 0, \underbrace{i}_{i\text{-ام}}, 0, 0>$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & {} \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & \mathbb{R}^m \arrow[d] \\
B & {[id]^B_{St_n}} & {[T]^{St_n}_{St_m}} & {[id]^{St_m}_{B'}} & B'
\end{tikzcd}$$

$$[T]^B_{B'} = [id]^{St_m}_{B'} [T]^{St_n}_{St_m} [id]^B_{St_n}$$

$$id_{\mathbb{R}^m} \circ T \circ id_{\mathbb{R}^n} = id_{\mathbb{R}^m}(T(id_{\mathbb{R}^m}))$$

مثال ۱-۵۴. دوران راستگرد حول بردار $\hat{v}$ به اندازه زاویه $\hat{\theta}$

چون هدف دوران راستگرد است، دنبال یک تبدیل خطی هستیم که $\hat{r}$ به i تصویر کند

$$Rot_{x,\theta} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ ۰ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$Rot_{x,\theta}$: (یعنی حول x به اندازه θ.)

$$\mathbb{R}^۳ \xrightarrow{Rot_{x,\theta}} \mathbb{R}^۳$$

$$\{i,j,k\}\text{پایه استاندارد}\{i,j,k\}$$

پس یک پایه پیدا می‌کنیم به‌صورت $\{v_۰, v_۱, v_۲\}$ که متعامد و راستگرد باشد.

$$T(\hat{v}_۰) = i \quad T(\hat{v}_۱) = j \quad T(\hat{v}_۲) = k$$

$$[T]^{\{\hat{v}_۰,\hat{v}_۱,\hat{v}_۲\}}_{\{i,j,k\}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$[Rot_{\hat{v}_۰,\theta}]^{\hat{v}_۰,\hat{v}_۱,\hat{v}_۲}$$

مثال ۱-۵۵. ماتریس متناظر به دوران راستگرد حول $v_n = (۱,۱,۰)$ را بیابید. *(به پایه استاندارد $\mathbb{R}^۳$).* ۸

راستگرد $T : \hat{v}_۰ \to \hat{i}$

جواب: پایه $\{\hat{v}_۱, \hat{v}_۲, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}\}$ راستگرد و متعامد برای $\mathbb{R}^۳$ می‌یابیم.

$$\det \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = ۱ - (-۱) = ۲ > ۰$$

تبدیل خطی T را در نظر بگیرید که

$$\begin{cases} T(\hat{v}_۰) = \hat{i} \\ T(\hat{v}_۱) = \hat{j} \\ T(\hat{v}_۲) = \hat{k} \end{cases}$$

$$[T]_{St}^{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$[Rpt_{\hat{v}_۰,B}\hat{X}]_{St}^{St} = \Big[T^{-۱} \circ Rot_{i,\theta} \circ T\Big]_{St}^{St}$$

$$= [T^{-۱}]_{St}^{St}[Rot_{\hat{i},\theta}]_{St}^{St}[T]_{St}^{St}$$

$$[Rot_{[}\hat{i},\theta]]_{St}^{St} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ ۰ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[T]_{St}^{St} = [id]_{St}^{St}[T]_{St}^{B}[id]_{B}^{St}$$

$$[id]_{B}^{\mathrm{id}} = \left([id]_{St}^{B}\right) = (v_۰|v_۱|v_۲)^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$[T]_{St}^{St} = I \cdot I \cdot \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}^{-۱}$$

$$[Rot_{v_۰,\theta}\hat{X}] = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ ۰ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & & & & & & \\ & ۱ & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \to i & & \\ & & & \sin(\theta) & \cos(\theta) \to j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & ۱ \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$< ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۴, -۱ >$$

$$P_{۳,۵,۳D} \quad < ۱, ۲, ۵, ۴, -۱ >$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۶ \end{pmatrix}$$

$$P_{۳,۵,\theta} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sin(\theta) & ۰ & \cos(\theta) & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

خواص $D_{i,j,\theta}$:

۱. تمام سطرها و ستون‌ها طول یک دارند.

۲.

$$P_{i,j,\theta} P_{i,j,\theta}^T = I = P_{i,j,\theta}^T P_{i,j,\theta}$$

۳. ماتریس متعامد یکه است.

۴.

$$P_{i,j,\theta_۱} P_{i,j,\theta_۲} = P_{i,j,\theta_۱+\theta_۲}$$

$$\hat{X} = \mathrm{Refl}_{u^\perp}\hat{X} = ۲\mathrm{Proj}_{\hat{u}}^{\hat{X}}$$
$$\mathrm{Refl}_{u^\perp}X = \hat{X} - ۲\mathrm{Proj}(\hat{X}) = \mathrm{id} - \frac{۲\hat{u}\cdot\hat{X}}{\hat{u}\cdot\hat{u}}$$
$$= \mathrm{id} - ۲QQ^T = \mathrm{id} - ۲\frac{u\cdot u^T}{u^T\cdot u}\hat{b}$$

۳.۱.۱ ضرب داخلی در یک فضای برداری مجرد

$$(x_۱,\dots,x_n)\cdot(y_۱,\dots,y_n) = x_۱y_۱ + \cdots + x_ny_n$$

خاصیت ناتباهیدگی:

- $\hat{u}\cdot\hat{u} = \parallel u \parallel^۲ \geq ۰ \qquad \hat{u}\cdot\hat{u} = ۰ \leftrightarrow u = ۰$
- $u\cdot(\alpha\hat{v}_۱ + \beta\hat{v}_۲) = \alpha\hat{u}\cdot\hat{v}_۱ + \beta\hat{u}\cdot\hat{v}_۲$
- $(\alpha\hat{v}_۱ + \beta\hat{v}_۲)\cdot\hat{u} = \alpha\hat{v}_۱\cdot\hat{u} + \beta\hat{v}_۲\cdot u$
- $\hat{v}\cdot\hat{u} = \hat{u}\cdot\hat{v} \qquad \forall\hat{u},\hat{v}$

تذکر ۱-۵۶. ضرب داخلی یک تابع

$$< .,. >: V \times V \to \mathbb{R}$$
$$< v,w > \mapsto \hat{v}\cdot\hat{w}$$

که دارای ۴ خاصیت ذکر شده با شرط l را ضرب داخلی می‌نامیم.

فضای برداری $C([۰,۱],\mathbb{R})$، تمام توابع پیوسته از $[۰,۱]$ به $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$$
$$< f,g > = ?$$
$$g : [۰,۱] \to \mathbb{R}$$

بررسی ضرب داخلی بودن:

$$< f, g >= \int_{0}^{1} f(x)g(x)\, dx$$
$$< f, f >= \int_{0}^{1} f^{2} dx \geq 0 \quad , \quad \int_{0}^{1} f^{2} = 0$$

تذکر ۱-۵۷. ماتریس $full\,rank$ و $tall$ $(A_{m\times n})_{m\geq n}$

$$A = Q_{m\times n} \underbrace{R}$$

$Q^{T}Q = I$ ستون‌ها متناظر یکه بودند.

تجزیه QR یکتاست ← یعنی $A = Q_{1}R_{1} = Q_{2}R_{2}$ پس $Q_{1} = Q$ و $R_{1} = R_{2}$.

۴.۱.۱ Gram–Shmid

$$u^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n} |\ < \hat{v}, \hat{u} >= 0\}$$

$$H_{\hat{u}}\hat{X} - \hat{X} = -2\mathrm{Proj}_{\hat{u}}\hat{X}$$
$$H_{u}\hat{X} = \hat{X} - 2\mathrm{Proj}_{\hat{u}}\hat{X}$$
$$= IX - 2\frac{\hat{u}\cdot\hat{X}}{\hat{u}\cdot\hat{u}} \cdot u$$
$$H_{u}\hat{X} = I\hat{X} - 2\frac{uu^{T}}{u^{T}u}$$
$$H_{u}(\hat{X})_{m\times m} = \left(I - 2\frac{uu^{T}}{u^{T}u}\right)\hat{X}$$
$$(A)_{m\times n} \rightsquigarrow \bar{A} = (\underbrace{A}|0|\ldots|0)_{m\times m}$$
$$H_{\hat{u}}\begin{pmatrix} a_{11} & \\ \vdots & \\ a_{m} & \end{pmatrix}$$

lu را باید طوری بیابیم که

$$H_u\begin{pmatrix} a_{۱۱} \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \| C_۱ \| \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{pmatrix}$$

پس اگر قرار دهیم $\hat{u} = \hat{C}_۱ - \| C_۱ \| e_۱$ که $e_۱ = \begin{smallmatrix} ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{smallmatrix}$ (ستونی که می‌خواهیم $-$ ستونی که داریم $= u$)

$$(H_{\hat{u}})_{m\times m} = I_{m\times m} - ۲\frac{uu^T}{u^Tu}$$

$$H_{\hat{u}}(A|۰|\dots|۰)_{m\times m} = \begin{pmatrix} \| C_۱ \| & \\ ۰ & \| C_۲ \| \\ ۰ & \\ \vdots & \\ \underbrace{۰}_{H_n\hat{C}_۱} & \end{pmatrix}$$

$u'_۲ =$ ستونی که می‌خواهیم $-$ ستونی که داریم $= C'_۲ - \| C'_۲ \| e_۱$

$$H_{u'_۲} = I_{(m-۱)\times(m-۱)} - ۲\frac{u'_۲ u_۲^T}{u_۲'^T u'_۲} \Rightarrow H_{u_۲} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & & & \\ \vdots & & & \\ ۰ & \underbrace{\quad}_{H_{u'_۲}} & & \end{pmatrix}_{m\times m}$$

$$H_{u_۱}(\bar{A}) = \begin{pmatrix} C_۱ & \\ ۰ & C'_۲ \\ ۰ & \\ \vdots & \\ ۰ & \end{pmatrix} \Rightarrow H_{u_۲}H_{u_۱}\bar{A} = \begin{pmatrix} \| C_۱ \| & \\ ۰ & \| C_۲ \| \\ ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

مثال ۱-۵۸.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&1&1\\3&-1&1\\3&1&1\end{bmatrix}_{4\times 3}\quad\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$u_1=\text{ستون اول}-\|\text{ستون اول}\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix}-\sqrt{20}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1-\sqrt{20}\\1\\3\\3\end{bmatrix}$$

$$H_{u_1}=I-2\frac{uu^T}{u^Tu}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}-\frac{2}{40-2\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{20}\\1\\3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\sqrt{20}&1&3&3\end{pmatrix}$$

$$H_{u_1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}-\frac{2}{40-2\sqrt{20}}\begin{bmatrix}21-2\sqrt{20}&1-\sqrt{20}&3(1-\sqrt{20})&3(1-\sqrt{20})\\1-\sqrt{20}&1&3&3\\3(1-\sqrt{20})&3&9&9\\3(1-\sqrt{20})&3&9&9\end{bmatrix}$$

خواص

$$\begin{cases}H^2=I\\ \\ H=H^T\end{cases}\Rightarrow HH^T=HH=I\to H=H^{-1}$$

$$H_3H_2H_1\bar{A}=\begin{pmatrix} * & & & 0 \\ 0 & * & & 0 \\ 0 & & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}=H_1H_2H_3\begin{pmatrix} * & & & 0 \\ 0 & * & & 0 \\ 0 & & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{m\times n}=(H_1H_2H_3)_{m\times n}R_{n\times n}$$

لیست ماتریس‌های معروف

- متقارن .... $A_{n\times n}=A^T_{n\times n}$
- پادمتقارن .... $A^T=-A$
- پوچ توان .... $\exists k\ s.t\ A^k_{n\times n}=0$
- خودتوان .... $A^2=A$
- متعامد .... $AA^T=I=A^TA$
- نرمال .... $AA^T=A^TA$
- بسطی .... $A^2=I$
- هرمیتی .... $(\bar{A})^T=A$
- پادهرمیتی .... $(\bar{A})^T=-A$

عملگر خطی: به هر تبدیل حطی $V_n \xrightarrow{T} V_n$ یک عملگر خطی نامیده می‌شود.

فرض کنید که V دارای بعد n باشد و با پایه‌های B_1 و B_2. در این‌صورت نمایش عملگر خطی خطی T را در پایه‌های B_1 و B_2 در نظر می‌گیریم.

رابطه:

$$[T]_{B_2}^{B_2} = [\mathrm{id}]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_1}[\mathrm{id}]_{B_1}^{B_2}$$
$$P = [\mathrm{id}]_{B_1}^{B_2}$$
$$[T]_{B_1}^{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1}^{B_1}P$$

تذکر ۱-۵۹. دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را متشابه گوییم اگر ماتریس معکوس‌پذیر $P_{n\times n}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$B = P^{-1}AP$$

به‌طور خلاصه: نمایش عملگر خطی T در دو پایه مختلف، ماتریس‌های متشابهی هستند.
اگر بتوان پایه‌ای برای V پیدا کرد به‌طوری‌که T، قطری شود

$$[T]_{B_2}^{B_2} = \begin{bmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{bmatrix}$$

آن‌گاه عملگر T قطری شونده است یعنی

$$\begin{bmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{bmatrix} = P^{-1}[T]_{B_1}^{B_1}P$$

تذکر ۱-۶۰. اگر ماتریس A قطری باشد، آن‌گاه

$$e^{At} = 1 + tA + \frac{t^2A^2}{2}$$

مثال ۱-۶۱. نشان دهید که A و B متشابه‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$if\; P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

A قطری نیست و B قطری است $\Leftarrow$ A قطری شونده است چون با B متشابه است.

۵.۱.۱ دترمینان

مفهوم: برای ماتریس $A_{n\times n}$ عبارتست از حجم n بعدی علامت‌دار متوازی‌الاضلاع السطوح تولید شده توسط اضلاع $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$.

$$A = \begin{bmatrix} \ldots & \hat{a}_1 & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & \hat{a}_n & \ldots \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$1D \Rightarrow \det[\alpha] = \alpha$ حجم یک بعدی

$2D \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = $ حجم علامت‌دار متوازی‌الاضلاع با اضلاع $\hat{a}$ و $\hat{b}$

در فضای ۲ بعدی از i به سمت j رفتن، پایه راستگرد است. حال اگر از a به سمت b برویم (ترتیبش مثل i و j باشد) و مثل i و j باشد پس

$\{i, j\} \Rightarrow$ راستگرد

$\{a, b\} \Rightarrow$ راستگرد $\quad if\; \{a, b\}$ $\begin{cases} \text{(خلاف عقربه‌های ساعت) راستگرد} \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}\right) = s > 0 \\ \text{(در جهت عقربه‌های ساعت) چپگرد} \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}\right) = s < 0 \end{cases}$

خواص حجم علامت‌دار:

1. $\det(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}) = -\det(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix})$

2. $\det(\begin{pmatrix} \hat{a}+k\hat{b} \\ \hat{b} \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$

3. $\det(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ c\hat{b} \end{pmatrix}) = c\det(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix})$

4. $\det(\begin{pmatrix} \hat{a} \\ b+k\hat{a} \end{pmatrix})$

5. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a\det\begin{pmatrix} ۱ & \frac{b}{a} \\ c & d \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} ۱ & \frac{b}{a} \\ ۰ & d-\frac{b}{a} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} ۱ & \frac{b}{a} \\ ۰ & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\det\begin{pmatrix} ۱ & \frac{b}{a} \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \\
&= ad-bc
\end{aligned}$$

برای بعد n: از هر ماتریس $m\times m$ یک عدد به ما می‌دهد.

$$\det : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$$

خواص:

۱. $R_i \overset{A'}{\leftrightarrow} R_j \Rightarrow \det(A') = -\det(A)$. اگر دو سطر را عوض کنیم دترمینان منفی می‌شود.

۲. $R_i \overset{A'}{\leftrightarrow} cR_i \Rightarrow \det(A') = c\det(A)$. اگر یک سطر را در یک عدد ضرب کنیم دترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود.

۳. $R_i \leftrightarrow R_i + cR_j \Rightarrow \det(A') = \det(A)$.

۴. $\det\begin{pmatrix} ۱ & & \\ & \ddots & \\ & & ۱ \end{pmatrix}_{n\times n} = ۱$

نحوه بدست آوردن دترمینان توسط $G-j$

$$\det\begin{pmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{R_۱ \leftrightarrow R_۳} -\det\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{pmatrix} \xrightarrow[-۲R_۱+R_۳\to R_۳]{-۲R_۱+R_۲\to R_۲} -\det\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$-\det\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ \end{pmatrix} = -۱۲\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = -۱۲\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = -۱۲$$

روشی دیگر:

$$\det\begin{pmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = ۲(۱-۰) - ۴(۲) + ۶(-۱) = -۱۲$$

روش ساروس :

$$\det\begin{pmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & \vdots & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۰ & \vdots & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \vdots & ۱ & ۰ \end{pmatrix} = ۲ + ۰ + ۰ - (۶ - ۰ + ۸) = -۱۲$$

یادآوری

دترمینان $\leftarrow$ هندسی $\leftarrow$ حجم n بعدی علامتدار در $\mathbb{R}^n$ حجم علامتدار متوازی‌السطوح با اضلاع مرتب $\hat{a}_۱, \ldots, \hat{a}_n$:

$$\det\begin{pmatrix} \ldots & a_۱ & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & a_n & \vdots \end{pmatrix}$$

به‌طور یکتا با خواص زیر مشخص می‌شود:

$$R_i \leftrightarrow R_j \qquad \det \to -\det$$
$$R_i \leftrightarrow cR_j \qquad \det \to c\det$$
$$R_i \leftrightarrow R_i + cR_j \qquad \det \to \det$$
$$\det I_n = 1$$

خواص مهم دترمینان:

- $if\ A singular \Leftrightarrow \det A = 0$
- $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ که E ماتریس سطری مقدماتی است.
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \det^{-1}(A)$
- $if\ A\, triangular \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $$\det\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} = \det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_k)$$
- $$\det\begin{pmatrix} A_{k\times k} & B_{l\times k} \\ 0 & D_{l\times l} \end{pmatrix} = \det(A_{k\times k})\det(D_{l\times l})$$
- $$\det\begin{pmatrix} A_{k\times k} & B_{k\times k} \\ C_{k\times k} & D_{k\times k} \end{pmatrix} = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$$
- $if\ A\, non-singular \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

اثبات. (۱). $A\, singular \Leftrightarrow \det(A) = \det(EA) \xrightarrow{G-j} = \det(R) = ۰$.

(۹). $if\ A\, npn - singular\ \Rightarrow R = I_n \Rightarrow \det(A) \neq ۰$

$$if\ A\, singular \Rightarrow Rank(A) < n \Rightarrow N(A^T) = C(A)^{\perp} \neq \{۰\}$$

$$\exists x : A^T X = ۰ \Rightarrow A^T\, singular \Rightarrow \det(A^T) = ۰$$

$$\det(A) = \det(A^T) = ۰$$

$$if\ A\, non - singular \Rightarrow \det(A) = \det(E^{-۱}R) = \det(E^{-۱})$$

$$= \det(E_۱^{-۱} \ldots E_n^{-۱}) = \det(E_۱^{-۱} \ldots E_n^{-۱}) = \det(E_۱^{-۱}) \ldots \det(E_n^{-۱})$$

$$= \det(E_{'T}) \ldots \det(E_n^{'T}) = \det(E^T) = \det(E) = \det(A^T)$$

تذکر ۱-۶۲. $if\ A\, singular \Rightarrow AB\, singular$

$\#\det(A) = \det(A^T)$

$$A\, singular \quad \exists a_{ii} \quad a_{ii} = ۰ \Rightarrow \det(A) = ۰$$

$$A\, non - singular\, a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn} \neq ۰ \quad \det(A) = a_{۱۱} \ldots a_{nn}$$

$\#Rank()_{m\times n} =$ بزرگترین r ای که می‌توان یک زیرماتریس $r \times r$ پیدا کرد با دترمینان ناصفر

مثال ۱-۶۳.

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = ۰$$

$E_A = R_۱ \quad E_۲ D = R_۲$

$$\begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & * \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & * \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & * \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} = \text{بالا مثلثی}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \quad if AC = CA$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \quad \text{اگر } A \text{ معکوس‌پذیر باشد}$$

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

□

فرمول کلی برای دترمینان

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad \text{علامت تناوبی} \Rightarrow \begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix} \to (1)^{i+j}$$

مینورهای ماتریس (کهاد)

A یک ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ باشد سطر i–ام و ستون j–ام را حذف می‌کنیم.

هم‌توان‌های ماتریس

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_i j$.

فرمول بر حسب یک ستون (j ثابت).

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

مثال حول ستون اول:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det(A_{n1})$$

اثبات. برای این‌که نشان دهیم فرمول داده شده det است باید نشان دهیم دارای تمام خواص دترمینان است. (ستون jام ثابت)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

مکان سطرهای h–ام و k–ام با هم عوض می‌کنیم. اگر سطرهای دیگر را بدست آوریم هرکدام یک منفی در ماتریس کهاد آن‌ها ضرب می‌شود.

حالت خاص $k = h + 1$.

$$(-1)^{h+j} a_{h+1,j} \det(A_{h+1,j}) = (-1)(-1)^{h+j} (a_{h+1,j}) \det(A_{h+1,j})$$

چون $\det(A) = \det(A^T)$ پس همان h' را برای سطرهای ثابت نیز می‌توانیم انجام داد.

بسط حول سطر:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

□

تذکر ۱-۶۴.

$$\det(tA - (1-t)B)^{\frac{1}{n}} \geq t \det(A) + (1-t) \det(B)$$

۶.۱.۱ قاعده کرامر

فرض کنید $AX = b$. اگر A معکوس‌پذیر باشد $X = A^{-1} b$.

$$A\begin{pmatrix} x_۱ \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = b \to \hat{b} = x_۱ A_{۰,۱} + \cdots + x_n A_{۱,n}$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{۰,۱} & A_{۰,۲} & b & \dots & A_{۰,n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} & x_۱ A_{۰,۱} & & \\ A_{۰,۱} & \vdots & A_{۱,j+۱} & A_{۰,n} \\ & x_n A_{۰,n} & & \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \det(A_۱|\dots|x_۱ A_۱ + \cdots + x_n A_n|\dots|A_n) =$$

$$\to x_۱ \det(A_۱|\dots|A_۱|\dots|A_n) + \cdots + x_j \det(A_۱|\dots|A_j|\dots|A_n) + \cdots + x_n \det(A_۱|\dots|A_n|\dots|A_n)$$

$$= x_j \det(A)$$

A معکوس‌پذیر باشد. $\Rightarrow x_j = \dfrac{\det(A_۱|\dots|b|\dots|A_n)}{\det(A)}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{۱}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(b|A_۲|\dots|A_n) \\ \det(A_۱|b|\dots|A_n) \\ \vdots \\ \det(A_۱|A_۲|\dots|A_{n-۱}|b) \end{bmatrix}$$

ستون j–ام $\hat{x} = A^{-۱} e_j = A^{-۱}$ $\quad$ $A\,\hat{A}X = \hat{e}_j = \begin{pmatrix} D \\ \vdots \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ معکوس‌پذیر باشد $\quad$ (۶)

$$x_i = \frac{\det(A_۱ \dots e_j \dots A_n)}{\det(A)} = \frac{۱}{\det(A)}((-۱)^{i+j} \det(A_{ji}) \qquad (۷)$$

اکنون از **(؟؟)**eq۱.۶.۲ و **(؟؟)**eq۱.۷.۲ داریم

$$A_{ij}^{-۱} = \frac{۱}{\det(A)}(-۱)^{i+j}\det(A_{ji}) = \frac{۱}{\det(A)}(-۱)^{i+j}\det(A_{ij})$$

•

$$C_{ij} = (-۱)^{i+j}\det(A_{ij})$$

A_{ij} به حذف ستون j–ام و سطر i–ام بدست می‌آید.

•
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad \text{یا} \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

•
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

که C^T ماتریس کوفاکتور است.

۷.۱.۱ مقادیر و بردارهای ویژه

عملگر خطی : $V \xrightarrow{T} V$.

ساده‌ترین عملگر خطی: $X \to aX$.

بردار ویژه: بردار ناصفر $V \neq 0$ را یک بردار ویژه برای T گوییم هرگاه در راستای بردار $\hat{v}$ عملگر T به‌صورت یک بعدی عمل می‌کند یعنی

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad T(\hat{v}) = \lambda \hat{v} \quad T \text{ مقدار ویژه عملگر } \lambda$$

$\hat{v} \neq 0$ را به این صورت، بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه λ.

مثال ۱-۶۵.

$$Rot_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad \theta \text{ دوران ۲ بعدی با زاویه }$$

مقدار ویژه ندارد مگر این‌که $k \in \mathbb{Z}$ و $\theta = K\pi$ چون در غیراین‌صورت بردار تبدیل شده در راستای $\hat{v}$ نیست.

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos(\theta) & -x_2 \sin(\theta) \\ x_1 \sin(\theta) & x_2 \sin(\theta) \end{bmatrix} \to$$

دوران یافته $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ به اندازه زاویه θ.

مثال ۱-۶۶. آیا ماتریس انعکاسی در $\mathbb{R}^3$ بردار ویژه دارد؟

$Refl_{u^\perp}(\hat{x}) = \lambda\hat{x}$

$Refl($بردار عمود بر صفحه$) = -($بردار عمود بر صفحه$) \rightarrow$ راستا را حفظ کرده

$Refl($بردار داخل صفحه$) =$ خود بردار داخل صفحه $\rightarrow \lambda = \pm 1$

مجموعه مقادیر ویژه عملگر T را طیف عملگر T گوییم.

محاسبه مقادیر ویژه T: $V \xrightarrow{T} V\ ,\ \dim(V) = n$.

یک پایه برای (B) برای V انتخاب می‌کنیم.

$$A = [T]_B^B = \text{ماتریس} \rightarrow T(\hat{v}) = [T]_B^B[\hat{V}]_B$$

$$T(\hat{V}) = \lambda\hat{V} \rightarrow A\hat{V} = \lambda\hat{V}$$

$$\rightarrow (A_{n\times n} - \lambda I_{n\times n})\hat{V} = 0$$

$$\xrightarrow{V\neq 0} A - \lambda I = 0 \rightarrow \text{تکین یا معکوس‌ناپذیر}$$

اگر $\hat{V} \neq 0$ بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه λ باشد، آن‌گاه $A - \lambda I$ معکوس‌ناپذیر و تکین است پس $\det(A - \lambda I) = 0$.

برعکس. فرض کنیم برای عدد λ داریم $\det(A - \lambda I) = 0$ در این‌صورت $A - \lambda I$ معکوس‌پذیر نیست. پس $(A - \lambda I)X = 0$ بینهایت جواب دارد. لذا جواب ناصفر دارد. پس $V \neq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $(A - \lambda I)\hat{V} = 0$ پس $A\hat{V} = \lambda\hat{V}$.

λ مقدار ویژه است اگر و تنها اگر $\det(A - \lambda I) = 0$.

مثال ۱-۶۷. مقدار ویژه ماتریس $\left(\begin{smallmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{smallmatrix}\right)$ را بدست آورید و بعد فضای ویژه را بدست آورید.

$$\det\left(\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}\cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos(\theta) - \lambda)^2 + \sin^2(\theta) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos(\theta) - 1} \rightarrow if\ \cos^2(\theta) < 1 \rightarrow \text{مقادیر ویژه حقیقی نداریم}$$

$$if\ \cos^2(\theta) = 1 \rightarrow \cos(\theta) = \pm 1 \rightarrow \theta = k\pi \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

مثال ۱–۶۸. مقادیر ویژه ماتریس

$$Rot_{x,\theta} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ ۰ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}]$$

را بدست آورید.

$$\det(Rot - \lambda I) = (۱ - \lambda)(\lambda^۲ - ۲\cos(\theta)\lambda + ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = ۱ \\ \theta \neq k\pi \end{cases} , \quad \begin{cases} \lambda = \pm ۱ \\ \theta = k\pi \end{cases}$$

مثال ۱–۶۹. مقاددیر ویژه ماتریس زیر را بدست آورید:

$$Rot_{x,theta} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos(theta) & -\sin(theta) \\ ۰ & \sin(theta) & \cos(theta) \end{bmatrix}$$

حل:

$$\det(Rot - \lambda I) = (۱ - \lambda)(\lambda^۲ - ۲\cos(theta)\lambda + ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = ۱ \\ theta \neq k\pi \end{cases} , \quad \begin{cases} \lambda = \pm ۱ \\ theta = k\pi \end{cases}$$

مثال ۱–۷۰.

$$A = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ -۳ & ۷ \end{pmatrix}$$

(A) چندجمله‌ای مشخصه را بدست آورید.

(B) مقادیر ویژه A را بدست آورید.

(C) زیرفضاهای ویژه را با احتساب پایه بدست آورید.

(D) آیا قطری شونده است؟

حل:
$tr(A) =$ جمع اعضای قطر اصلی A.
چندجمله‌ای درجه n برحسب λ $= \det(A - \lambda I) =$ چندجمله‌ای مشخصه.

$$\det \begin{bmatrix} a_{۱۱} - \lambda & & & \\ & a_{۲۲} - \lambda & * & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = (-۱)^n \lambda^n + (-۱)^{n-۱}(tr(A))\lambda^{n-۱}$$
$$+ (-۱)^{n-۲}(*)\lambda^{n-۲} + \cdots + (tr(C))\lambda + \det(A) = ۰$$

$tr(C)$: ماتریس کوفاکتور
(A)

$$\det \begin{pmatrix} ۳ - \lambda & ۱ \\ -۳ & ۷ - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^۲ - ۱۰\lambda + ۲۴ = ۰ \to \begin{cases} \lambda = ۴ \\ \lambda = ۶ \end{cases} \qquad \text{فرمول} \Rightarrow P_A(\lambda) = (-۱)^۲\lambda^۲ - ۱۰\lambda + ۲۴$$

۸.۱.۱ زیرفضاهای ویژه

λ مقدار ویژه:

$$E(\lambda) = \{v |\, Av = \lambda v\} = \{v |\, (A - \lambda I)v = ۰\} = N(A - \lambda I)$$
$$\begin{cases} Av = \lambda v \\ Aw = \lambda w \end{cases}$$
$$v, w \in E(\lambda), \quad A(\alpha v + \beta w) = \alpha Av + \beta Aw = \lambda(\alpha v + \beta w)$$

زیرفضاهای ویژه متناظر با $\lambda = ۴$:

$$E(۴) = \{v|\, Av = ۴v\} = N(A - ۴I)$$
$$\to N\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ -۳ & ۳ \end{pmatrix} \xrightarrow{۶-j} N\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}\}$$
$x_۱ \to$ آزاد $\qquad x_۲ \to$ وابسته

زیرفضای ویژه متناظر با $\lambda = ۶$:

$$E(۶) = \{v|\, Av = ۶v\} = N(A - ۶I)$$
$$= N\begin{pmatrix} -۳ & ۱ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{۶j} N\begin{pmatrix} -۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \end{pmatrix}\}$$

قطری شوندگی: $P^{-}AP = \begin{pmatrix} * & ۰ \\ ۰ & * \end{pmatrix}$

اگر چنین ماتریسی وجود داشته باشد آن‌گاه قطری است.

۱. اگر ماتریس A را داشته باشیم، اعضای قطر اصلی A، مقادیر ویژه‌اند.

۲. بردارهای ویژه متناظر تولید می‌کنند یعنی می‌توان پایه‌ای پیدا کرد که فقط از بردارهای ویژه درست شده باشد.

پایه

$$B = \{\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}\}$$

را در نظر می‌گیریم (مستقل خطی‌اند و فضا را تولید می‌کنند پس پایه‌اند.)

$$\text{تغییر پایه} \to [A]_B^B = [\mathrm{id}]_B^{St}[A]_{St}^{St}[\mathrm{id}]_{St}^B =$$
$$= [[\mathrm{id}]_{St}^B]^{-۱}A[\mathrm{id}]_{St}^B = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}^{-۱} A \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{pmatrix}$$

قطری شوندگی:

ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید. اگر پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که تنها از بردارهای ویژه A تولید شده باشند مثل B، نمایش ماتریس A در پایه B یک ماتریس قطری است و اعضای قطر آن مقادیر ویژه A هستند.

$$B = \{v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0\}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \quad Av_i := \lambda v_i$$

$$[A]_B^B = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \xrightarrow{\text{نمایش مختصاتی}} Av_1 =< \lambda_1, \dots, 0 >$$

$$[A]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{قطری است}$$

اگر بردارهای ویژه فضا را تولید کنند آن‌گاه ماتریس A قطری شونده است.

حالت خاص: اگر $A_{n\times n}$ n مقدار ویژه متمایز داشته باشد آن‌گاه حداقل n بردار ویژه داریم متناظر به این مقادیر ویژه.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\alpha \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n = 0$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 v_1 & \dots & \alpha_n v_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(v) =\neq 0 \Rightarrow \aleph_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

مثال ۱-۷۱.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(A) چندجمله‌ای مشخصه

(B) مقادیر ویژه

(C) فضاهای ویژه

$$P_A(\lambda) = -\lambda^{۳} + ۳\lambda^{۲} - (۱ + ۰ + ۱)\lambda + \det(A)$$

(D) قطری شوندگی:

$$P_A(\lambda) = -\lambda^{۳} + ۳\lambda^{۲} - ۲\lambda + ۰$$

$$P_A(\lambda) = ۰ \Rightarrow -\lambda(\lambda^{۲} - ۳\lambda + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{۱} = ۰ \\ \lambda_{۲} = ۱ \\ \lambda_{۳} = ۲ \end{cases}$$

بدست آوردن فضای ویژه:

$$E(۰) = N(A) \overset{G-j}{=} N \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = span\{v_۱ = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}\}$$

$$E(۱) = N(A - I) = N \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = span\{v_۲ = \begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۲ \end{pmatrix}\}$$

$$E(۲) = N(A - ۲I) = N \begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} = span\{v_۳ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}\}$$

$$P = [v_۱ | v_۲ |] = \begin{pmatrix} -۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$P^{-۱}AP = \cdots = \text{قطری است} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

تذکر ۱-۷۲. اگر A و B ماتریس‌های متشابه باشند $(B = P^{-۱}AP)$ آن‌گاه مقادیر ویژه یکسانی نیز دارند.

قضیه ۱-۷۳. A معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر ۰ مقدار ویژه آن نباشد.

اثبات.

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-۱}AP - \lambda P^{-۱}IP) =$$
$$\det(P^{-۱}(A - \lambda I)P) = \det(P^{-۱})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I)$$

□

قضیه ۱-۷۴. A قضری شونده است اگر و فقط اگر A مشابه است با یک ماتریس قطری باشد.

کیلی همیلتون: $\Rightarrow P_A(A) = ۰$

قضیه ۱-۷۵. هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ چندجمله‌ای مشخصه خود را صفر می‌کند.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ چندجمله‌ای مشخصه

$\Rightarrow (-1)^n A^n + (-1)^{n-1}(tr(A))A^{n-1} + \cdots - (tr(C))A + \det(A)I = 0$

اثبات.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

B برای یک ماتریس معکوس‌پذیر $\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} C^T, \quad C^T = adj(B) \rightarrow$

$\rightarrow B$ ماتریس الحاقی $\Rightarrow adj(B)B = \det(B)I$

$adj(A - \lambda I)(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)I \rightarrow$ چندجمله‌ای در فضای ماتریس‌ها

معکوس‌پذیرها و توابع پیوسته است $\rightarrow Badj(B) = adj(B)B$

معکوس‌ناپذیر $\rightarrow B_4 \rightarrow B_4$

□

۹.۱.۱ تجزیه SVD

اهداف:

$A_{m \times n} = \delta_1 Z_1 + \delta_2 Z_2 + \cdots + \delta_r Z_r$

$r = rank(A)$

خاصیت اول $\Rightarrow$ ضرایب نزولی $\Rightarrow \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots$

خاصیت دوم $\Rightarrow < Z_1, Z_2 > = tr(Z_1 Z_2^t)$

ضرب داخلی روی ماتریس‌های $m \times n$:

$$< Z_i, Z_j > = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

هر ماتریس $A_{m\times n}$ تجزیه‌ای به شکل زیر دارد:

$$A_{m\times n} = U_{m\times m} \sum_{m\times n} V^T_{n\times n}$$
$$U^T U = U U^T = I$$
$$V^T V = V V^T = I$$

U و V ماتریس‌های متعامداند

$$\sum_{i\neq j} i,j = 0 \qquad \sum = \begin{bmatrix} & O \\ O & \end{bmatrix}_{n\times n}$$

قضیه ۱-۷۶ (قضیه طیفی). هر ماتریس متقارن $A_{n\times n}$، مقادیر ویژه صرفا حقیقی دارد و قطری شونده است.

اثبات. متقارن: $A^T_{n\times n} = A_{n\times n}$

$P_A(\lambda) = 0$ را در اعداد مختلط حل می‌کنیم و n جواب مختلط بدست می‌آید. فرض کنید $\lambda = a + bi$ مقدار ویژه باشد.

$$S = (A-(a+bi)I)(A-(a-bi)I) = A^2 - 2aA + (a^2+b^2)I = (A-aI)^2 + b^2 I$$
$$S\hat{X} = 0 \to < S\hat{X}, \hat{X} >= 0$$
$$\to < (A-(a+bi)I(A-(a-bi)I)\hat{X}, \hat{X} >= 0$$
$$\to < (A-(a-bi)I)\hat{X} = (A-(a-bi)I)\hat{X} > \ = 0$$
$$< A\hat{X} - (a-bi)\hat{X}, A\hat{X} - (a-bi)\hat{X} > \ = 0$$
$$< A\hat{X}, A\hat{X} > + b^2|X|^2 + 2 < b\hat{X}, A\hat{X} > i = 0$$
$$\to b = 0$$

□

تذکر ۱-۷۷. $A_{n\times n}$ ماتریس متقارن باشد و نامتفی و معین باشد (تمام مقادیر ویژه نامنفی‌اند) می‌توانیم $\sqrt{A}$ را حساب کنیم. $XAX^T \geq 0$

$$A = PDP^{-1} \to \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$$

SVD

$$A_{m\times n} = U_{n\times m} \sum_{m\times n} V^T_{n\times n}$$

$$\to A_{m\times n}A^T_{n\times m} = U\sum V^T V \sum^T U^T = U\sum\sum^T U^T$$

$$\Rightarrow U \sum_{m\times n} \sum_{n\times m}^T U^{-1}$$

خلاصه: ماتریس $\sum m\times n$ به‌صورت $(\delta_i \geq 0)$ زیر است:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & O \\ & & \delta_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \\ P & & & \vdots & * \end{bmatrix}_{m\times n}$$

δ_i^2 مقادیر ویژه مشترک ناصفر AA^T و A^TA هستند.

$$U\sum V^T = (u_1|u_2|\ldots|u_m)\begin{pmatrix} \delta_1 & O & \\ & & O \\ O & \delta_n & \\ & O & O \end{pmatrix}(v_1|v_2|\ldots|v_n)^T$$

$$= \delta_1 u_1 v_1^T + \delta_2 u_2 v_2^T + \cdots + \delta_r u_r v_r^T$$

برای بدست آوردن δ_iها مقادیر ویژه A^TA را حساب کرده و رادیکال می‌گیریم.

$$\begin{pmatrix} house \\ holder \end{pmatrix} A_{m\times n} \begin{pmatrix} house \\ holder \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}(A) + N(A)$$

$$\mathbb{R}^m = C(A) + N(A)$$